MATEMATICA FINANZIARIA E ATTUARIALE

A. *Introduzione*

In questa sezione parleremo di argomenti di matematica finanziaria, almeno come la insegnavo negli anni '70 del secolo scorso in un istituto tecnico commerciale: oggi come oggi, strumenti piu' perfezionati sono utilizzabili; quindi alcune parti obsolete, quali l'uso del regolo calcolatore, saranno tralasciate.
Questi gli argomenti che tratteremo:

- Capitalizzazioni
- Rendite finanziarie
- Costituzione di un capitale
- Ammortamento di un debito
- Assicurazioni
- Riserva matematica
- I problemi della scelta
- Cenni di programmazione lineare

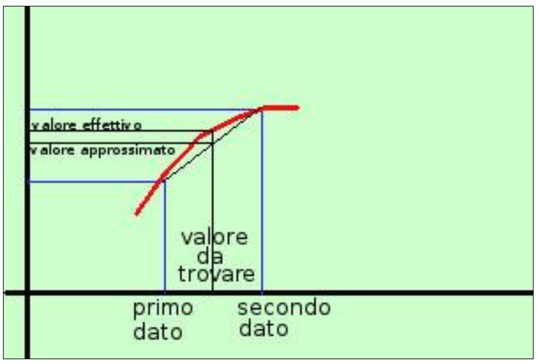
Altri argomenti correlati, quali teoria delle probabilita', statistica descrittiva, teoria dei giochi, studio di funzioni,... potete trovarle nelle capitoli specifici.
Prima di procedere evidenziamo alcuni argomenti di matematica che ci saranno utili per gli esercizi :

- Interpolazione lineare
- Logaritmi decimali

1. Interpolazione lineare

a) Cos'e' l'interpolazione lineare

L'***interpolazione lineare*** e' un metodo per trovare approssimativamente un valore compreso tra due valori noti.
Spesso avremo dei dati che potremo desumere da tabelle prestampate e ci servira' un dato compreso tra due dati della tabella: noi studieremo il modo di trovare un valore il piu' possibile vicino al vero per il nostro dato.
In pratica, considerando i dati come punti di una funzione, noi sostituiremo alla curva della funzione passante fra i due dati un segmento di retta e considereremo il valore cercato su tale segmento.



Naturalmente tale valore sara' approssimato, ma potremo sempre desumere dalla tabella se tale valore e' approssimato per eccesso oppure per difetto.
Nell'esempio in grafico il valore e' approssimato per difetto perche' in verticale e' sotto il valore effettivo.

b) Interpolazione diretta

Si parla di ***interpolazione diretta*** quando ai numeri crescenti corrispondono dei dati crescenti (cioe' se crescono i numeri della prima colonna della tabella allora crescono anche i numeri della seconda).
Prima facciamo un esempio pratico partendo da un tipo di tabelle di solito usato alle scuole medie: la tabella dei cubi.
Riportiamone un piccolo stralcio:

Numeri	Cubi
123	1860867
124	1906624
125	1953125
126	2000376

Supponiamo di dover calcolare **$(124{,}7)^3$**,
Quando il nostro numero passa da 124 a 125 si incrementa di 1 (l'incremento e' di quanto il primo numero aumenta per diventare il secondo); contemporaneamente, il cubo si incrementa da 1906624 a 1953125 cioe' di 1953125-1906624 = 46501.
Significa che ad un incremento di 1 del numero corrisponde un incremento di 46501 per il cubo. Noi siccome cerchiamo il cubo di 124,7 (chiamiamolo x) dovremo vedere a quanto corrisponde un incremento di 0,7 del numero; supponiamo che gli incrementi siano proporzionali, allora potremo scrivere:

$$1 : 46501 = 0.7 : x$$

Risolvo la proporzione:

$$x = 0{,}7 \cdot 46501 = 32550{,}7$$

Quindi l'incremento che corrisponde a 0,7 e' 32550,7 e quindi avremo:
$(124{,}7)^3 = 1906624 + 32550{,}7 = 1939174{,}7$

Naturalmente tale valore e' approssimato e differisce in qualcosa dal valore effettivo (1939096,2), pero' ci permette di tenere sotto controllo l'errore senza farlo diventare troppo incisivo e quando non si potra' fare di meglio dovremo accontentarci.

Ora trasformiamo l'esempio in formule; consideriamo una tabella e due sue righe:

Numeri x	Risultati y
....	....
x_1	y_1
x_2	y_2
....	....

Supponiamo di dover calcolare il valore (chiamiamolo y_0) corrispondente ad x_0 compreso fra i valori x_1 e x_2:

Numeri x	Risultati y
....	....
x_1	y_1
x_0	y_0
x_2	y_2
....	....

Il ragionamento da fare e': quando il numero x passa da x_1 ad x_2 allora il risultato y passa da y_1 ad y_2 e quando il numero x passa da x_1 ad x_0 il risultato y passa da y_1 a qualcosa che dobbiamo trovare (y_0). Scriviamolo in formule

---

Quando il numero x passa da x_1 ad x_2 si scrive $\mathbf{x_2 - x_1}$
il risultato y passa da y_1 ad y_2 si scrive $\mathbf{y_2 - y_1}$.
Quando il numero x passa da x_1 ad x_0 si scrive $\mathbf{x_0 - x_1}$
il numero y passa da y_1 a y_0 si scrive $\mathbf{y_0 - y_1}$

Vale la proporzione:

$$(x_2 - x_1):(y_2 - y_1) = (x_0 - x_1):(y_0 - y_1)$$

devo trovare y_0, prima risolvo la proporzione:

$$y_0 - y_1 = \frac{(x_0 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Ora trovo y_0 ed ottengo la formula dell'interpolazione diretta:

$$y_0 = \frac{(x_0 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + y_1$$

Come esercizio vediamo di applicare la formula trovata all'esempio precedente. Ho come dati:
$\mathbf{124^3 = 1906624}$
$\mathbf{125^3 = 1953125}$
Devo trovare $\mathbf{124{,}7^3 = y_0}$
Applico la formula:

$$y_0 = \frac{(x_0 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + y_1 = \frac{(124{,}7 - 124) \cdot (1953125 - 1906624)}{(125 - 124)} + 1906624 =$$

$$= 0{,}7 \cdot 46501 + 1906624 = 32550{,}7 + 1906624 = 1939174{,}7$$

Vediamo infine un esempio considerando la colonna dei numeri crescente mentre l'insieme dei risultati e' decrescente; tipo quello che succede quando consideriamo gli inversi dei numeri naturali $n \rightarrow 1/n$.
Possiamo applicare comunque sempre la stessa formula (avremo pero' come decremento un numero negativo):

Numero	Inverso
124	0,008064516
124,7	y_0
125	0,008000000

Applico la formula:

$$y_0 = \frac{(x_0 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + y_1 = \frac{(124,7 - 124)\cdot(0,008000000 - 0,008064516)}{(125 - 124)} + 0,008064516 =$$

$= 0{,}7\cdot(-000064516)+0{,}008064516 = 0{,}000045161+0{,}008064516 = 0{,}008019355$

c) Interpolazione inversa

Si parla di ***interpolazione inversa*** quando, conoscendo il risultato y_0, si vuole risalire al valore x_0 della prima tabella.
In pratica, dalla proporzione di partenza dobbiamo ricavare x_0 invece di y_0 :

$$(x_2 - x_1):(y_2 - y_1) = (x_0 - x_1):(y_0 - y_1)$$

Devo trovare y_0; prima risolvo la proporzione:

$$x_0 - x_1 = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(y_0 - y_1)}{(y_2 - y_1)}$$

Ora trovo x_0 ed ottengo la formula dell'interpolazione inversa:

$$x_0 = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(y_0 - y_1)}{(y_2 - y_1)} + x_1$$

Di solito, senza ricordare le formule a memoria, si preferisce partire sempre dalla proporzione e poi fare i calcoli; facciamo comunque un esercizio applicando la formula.

Come esercizio vediamo di applicare la formula trovata all'esempio precedente. Ho come dati:

Numeri	cubi
124	1906624
125	1953125

Dato il valore del cubo **1939096,223** essendo tale numero nella tabella compreso tra 1906624 e 1953125 devo trovare a quale $\mathbf{x_0}$ esso corrisponde;

$x_0 \rightarrow$ **1939096,223**

Numeri	cubi
124	1906624
x_0	1939096,223
125	1953125

$x_0 \rightarrow$ **1939096,223**

Dati: $x_1 = 124$ $y_1 = 1906624$ $x_2 = 125$ $y_2 = 1953125$ $y_0 = 1939096{,}223$

Applico la formula:

$$x_0 = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(y_0 - y_1)}{(y_2 - y_1)} + x_1 = \frac{1\cdot(1939096,223 - 1906624)}{(1953125 - 1906624)} + 124 =$$

$$= \frac{324{,}72}{46501} + 124 = 0{,}698312359 + 124 = 124{,}698312359$$

Come vedi il risultato e' molto vicino a 124,7

2. Logaritmi decimali

a) Cos'e' un Logaritmo decimale

Se hai bisogno di una trattazione teorica piu' completa e generale puoi riferirti all'argomento Logaritmi sviluppato in algebra.

Scriviamo l'uguaglianza:
$10^3 = 1000$
Questa e' una potenza:
il **10** si chiama ***base***
il **1000** e' il risultato dell'operazione potenza
il **3** si chiama ***esponente della potenza*** od anche ***logaritmo a base 10 di 1000.***

Quindi esponente della potenza e logaritmo sono la stessa cosa. E possiamo definire:

Il logaritmo decimale di un numero e' l'esponente della potenza che devo dare a 10 per ottenere il numero.

Cosi, ' se voglio ottenere il numero **1.000.000** (un milione), devo scrivere:
$10^6 = 1.000.000$ cioe'
6 e' il logaritmo di **1.000.000** in base **10** e scrivero':
$6 = \log_{10} 1.000.000$

Vista l'importanza di questi logaritmi invece di mettere la base si preferisce scrivere maiuscola l'iniziale di logaritmo, quindi
$6 = \text{Log}\ 1.000.000$

Ogni volta che incontrerai il simbolo **Log** con l'iniziale maiuscola dovrai considerare che e' sottintesa la base **10.**

b) Perche' i Logaritmi

Premesso che, al giorno d'oggi con l'utilizzo delle calcolatrici l'uso dei logaritmi ha perso quasi tutta la sua importanza, fino a 50 anni fa i logaritmi erano quasi l'unico modo di poter risolvere certe espressioni e certi calcoli.
Prima di essi si utilizzavano le formule di Prostaferesi in trigonometria, con un ben maggior cumulo di operazioni per poter risolvere i vari problemi, tanto che un astronomo commento' che Nepero, considerato l'inventore dei logaritmi, aveva regalato loro meta' della loro vita (dedicata quasi completamente ai calcoli astronomici).
Se vuoi approfondire, per le proprieta' cui facciamo riferimento puoi seguire:

- operazioni sulle potenze
- radicali in forma esponenziale
- proprieta' dei logaritmi

Scriviamo l'uguaglianza:
$10^3 = 1000$
Il logaritmo 3 e' l'esponente della potenza e quindi per esso valgono le proprieta' viste per gli esponenti di potenza, ad esempio:

il prodotto fra due potenze di stesssa base e' ancora una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
Se ora devo fare il prodotto fra due numeri e riesco a metterli in forma di potenza a base 10 invece di fare il prodotto potro' fare la somma degli esponenti per ottenere il risultato.

Ti faccio un esempio ovvio con numeri banali, pero' quello che conta e' il metodo che potremo applicare a tutti i numeri:
10.000 X 100.000 =
trasformo in potenza di 10 (**4 e 5**)
=10^4 X 10^5 =
sommo gli esponenti (**4+5=9**)
= 10^9 =
ritrovo il numero sviluppando la potenza (**10^9= 1.000.000.000**)
= 1000.000.000
Cioe' noi passeremo dai numeri agli esponenti, eseguiremo le operazioni richieste e, trovato il risultato come esponente, troveremo poi il numero di cui esso e' logaritmo.

Ti enumero qui di seguito le proprieta' dei logaritmi decimali (e dei logaritmi in generale)

- *il logaritmo di un prodotto e' uguale alla somma dei logaritmi dei fattori*:
  Log a·b = Log a + Log b ($10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$) trasformo un prodotto in somma (vedi Prodotto di potenze con la stessa base)
- *il logaritmo di un quoziente e' uguale alla differenza dei logaritmi del numeratore e del denominatore*:
  Log a/b = Log a - Log b ($10^a/10^b = 10^{a-b}$) trasformo un quoziente in differenza (vedi Quoziente di potenze)
- **Log a^b = b Log a ($10^{ab} = 10^{a \cdot b}$) trasformo una potenza in prodotto** (vedi Potenza di una potenza)
- **Log $\sqrt[n]{a}$ = 1/n Log a ($\sqrt[n]{10^a} = 10^{a/n}$) trasformo una radice in divisione** Vedi Radicali in forma esponenziale)

Come vedi,i logaritmi ti danno la possibilita' di eseguire operazioni che da molto difficili diventeranno abbastanza semplici.

c) Logaritmi decimali

Consideriamo i logaritmi (esponenti) con base 10 che sono anche detti ***logaritmi decimali o di Briggs***:
$10^3 = 1000$
Se il numero e' 1 seguito da piu' zero e' facile trovare il logaritmo; se invece abbiamo un qualunque numero, abbiamo due possibilita' :

- **Uso della calcolatrice**
  E' il metodo piu' semplice: imposti sulla calcolatrice il tasto logaritmo, scrivi il numero e batti = ed ottieni:
  Log 1000 = 3
  Log 2 = 0,301029996
  Log 2000 = 3,301029996
- **Uso delle tavole logaritmiche**
  Leggiamo sulle tavole:
  1000 → 00000
  2 → 30103
  2000 → 30103
  Le tavole ti danno solamente la parte decimale del logaritmo (**mantissa**), mentre

devi mettere tu la parte intera (**caratteristica**). Non e' difficile; come regola mnemonica puoi dire che metti un numero uguale al numero di cifre prima della virgola meno uno:
essendo 1000 composto da 4 cifre metti 3
essendo 2 composto da 1 cifra metti 0. 2 e' compreso fra $1=10^0$ e $10 = 10^1$, quindi il suo logaritmo e' compreso fra 0 ed 1 e quindi sara' 0 virgola qualcosa;
essendo 2000 composto da 4 cifre metti 3 2000 e' compreso fra $1000=10^3$ e $10000 = 10^4$, quindi il suo logaritmo e' compreso fra 3 e 4 e quindi sara' 3 virgola qualcosa.
Quindi:
Log 1000 = 3,00000
Log 2 = 0,30103
Log 2000 = 3,30103
Questo deriva dal fatto che le potenze di 10 sono:
$10^0 = 1$ $10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$ $10^4 = 10.000$

Quindi se ho un numero fra 100 e 1000 (di 3 cifre) avro' che il suo logaritmo vale 2 e qualcosa essendo questo qualcosa la mantissa, cioe' la parte decimale che leggo sulle tavole.
Logaritmi di numeri che sono tra loro multipli di 10, 100, 1000 come ad esempio 5, 50, 500, 5000 hanno tutti la stessa mantissa 69897 .

In queste pagine per i logaritmi utilizzeremo le tavole, piu' che altro come esercizio mentale, essendovi ancora alcune scuole che le utilizzano. Se possibile utilizzate sempre la calcolatrice: ne guadagnerete in velocita' e precisione.
Considero il logaritmo decimale di 200.
Log 200 = 2,30103 che significa **$10^{2,30103} = 200$**
2,30103 e' il logaritmo (esponente del 10)
2 e' la caratteristica
30103 e' la mantissa
200 si chiamera' ***antilogaritmo*** quando dovremo ricavarlo dal logaritmo.

d) Applicazioni con uso delle tavole

Come ho gia' detto, se possibile, sarebbe preferibile l'uso della calcolatrice per avere maggior velocita' e precisione, ma, se proprio la vostra scuola vuole l'uso delle tavole, vediamo in queste pagine come comportarci:

- Trasformare un numero nel Logaritmo corrispondente
- Calcoli con i Logaritmi
- Trasformare un Logaritmo nel numero corrispondente
- Esercizi di calcolo con l'uso delle tavole

(1) Trasformare un numero nel Logaritmo corrispondente

Vediamo alcuni esempi diversi:

- Il numero e' compreso fra 1 e 10.000
- Il numero e' compreso fra 10.001 e 11.500
- Il numero e' compreso fra 0 ed 1
- Mi servono piu' cifre "decimali"

Il secondo caso e' con logaritmi a 7 decimali.

---

1) Cerchiamo:
Log 3256,4 =
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1000 e 10.000, il suo valore sara' compreso fra 3 e 4 e quindi la sua caratteristica sara' 3.
Calcolo la mantissa:
leggo sulle tavole
3256 → 51268
3257 → 51282
Quindi per trovare il mio valore dovrei fare l'interpolazione

3256	→	51268
3256,4	→	51268+x
3257	→	51282

1 : 14 = 0,4 : x
Ad un incremento 1 del numero corrisponde un incremento 14 della mantissa; ad un incremento di 0,4 del numero corrisponde un incremento della mantissa che devo trovare e chiamo x
x = 14 · 0,4 = 5,6
51268 + 5,6 = 512736 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma; quindi:
Log 3256,4 = 3,512736
Le tavole pero' sono predisposte per farti calcolare il risultato nel piu' breve tempo possibile e quindi l'interpolazione e' gia' risolta; osserva le tavole:

3256	→	51268	
			14
3257	→	51282	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **14** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.

Se poi guardi la pagina dei logaritmi, trovi una tabellina con intestazione 14 come riprodotto qui sulla destra: questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 4 corrisponde 5,6:

	14
1	1,4
2	2,8
3	4,2
4	5,6
5	7,0
6	8,4
7	9,8
8	11,2
9	12,6

51268 + 5,6 = 512736

e, come gia' visto:
Log 3256,4 = 3,512736
Naturalmente nessuno mi impedisce di calcolare logaritmi superiori a quelli indicati; ad esempio, il logaritmo di 32.564 sara' 4,512736 cioe' caratteristica 4 e mantissa uguale al logaritmo trovato prima, pero' essendo logaritmi a 5 decimali l'errore e' piuttosto elevato per parecchie applicazioni.

---

2) Cerchiamo:
Log 10256,4 =
Vedremo poi che corrisponde ad un tasso del 2,2564%
Qui ci servono i logaritmi a 7 decimali in modo da avere un errore di circa 1 su un milione

(cioe' dell'ordine di un centesimo su diecimila euro).
Prima fisso la caratteristica; essendo il valore del logaritmo compreso fra 10000 e 100.000, il suo valore sara' compreso fra 4 e 5 e quindi la sua caratteristica sara' 4.
Calcolo la mantissa:
leggo sulle tavole
10256 → 0109780
10257 → 0110204
Senza fare l'interpolazione utilizziamo le tavole

10256	→	0109780	
			424
10257	→	0110204	

Cerco la tabellina con intestazione 424 e vedo che al decimale 4 corrisponde 169,6 e quindi **0109780+169,6 = 01099496** la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma e quindi:
Log 10256,4 = 4,01099496
od anche:
$10256{,}4 = 10^{4{,}01099496}$

Se lo facevo con la calcolatrice, ottenevo **Log 10256,4 = 4,01099495** quindi con un margine di errore molto piccolo.

---

3) Vediamo su un esempio cosa succede con numeri inferiori ad 1
Log 0,000034256
Prima fisso la caratteristica; essendo il valore del logaritmo compreso fra 1/10.000 (10^{-4}) e 1/100.000 (10^{-5}), il suo valore sara' compreso fra -4 e -5; pero' abbiamo un problema: la mantissa non puo' mai essere negativa, quindi, dovendo aggiungere una quantita' positiva considereremo il valore piu' basso (10^{-5}), e, per ricordare che caratteristica e mantissa hanno segno diverso, metteremo una barra sopra il valore della caratteristica cosi' $\overline{5}$.
Come regola mnemonica devi scrivere come caratteristica il numero di zeri che vedi scritti prima della prima cifra significativa del numero (nel nostro caso 5 zeri) e metterci sopra la barra.
Calcolo la mantissa per 3425,6

3425	→	53466	
			13
3426	→	53479	

Cerco la tabellina con intestazione 13 e vedo che al decimale 6 corrisponde 7,8 e quindi **53466+6,8 = 534728** la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma e quindi:
Log 0,000034256 = $\overline{5}$,534728
Per fare le somme ricordati che il numero trovato e' formato da **-5** negativo e **0,534728** positivo.

---

4) Se voglio piu' cifre oltre quelle che trovo sulle tavole:
Log 35,67825
Prima fisso la caratteristica; essendo il valore del logaritmo compreso fra 10 (10^1) e 100 (10^2), il suo valore sara' compreso fra 1 e 2, quindi prendo 1.
Calcolo la mantissa per 3567,827

3567	→	55230
		12
3568	→	55242

Cerco la tabellina con intestazione 12 e vedo che
al decimale 8 corrisponde 9,6
al decimale 2 corrisponde 2,4
al decimale 7 corrisponde 8,4
e quindi, ricordandomi che ogni decimale successivo va spostato di un posto,essendo il primo un decimale, il secondo un centesimale, il terzo un millesimale,...

5 5 2 3 0	+
9,6	+
2,4	+
8,4	=
5 5 2 3 9 9 2 4	

e quindi:
Log 35,67825= 1,55239924
od anche:
$35{,}67825 = 10^{1{,}55239924}$
Fai attenzione pero': per l'errore dovuto all'interpolazione di solito si considerano al piu' due cifre oltre quelle presenti sulle tavole.

(2) Calcoli con i Logaritmi

Dopo aver trasformato i numeri in Logaritmi ed averne applicato le proprieta', ora ci troviamo a dover fare dei calcoli.
Per matematica finanziaria ci interessano solamente le operazioni di somma e differenza ed a queste ci limiteremo.
Anche se e' abbastanza intuitivo, vediamo su alcuni esercizi come comportarci per i calcoli con i Logaritmi decimali in modo che la suddivisione in caratteristica e mantissa non ci faccia sbagliare:

- Somma
- Differenza (CoLogaritmo)

a. Somma

Se utilizziamo la proprieta' che nei logaritmi un prodotto puo' essere trasformato in una somma, dovremo poi, una volta trasformati gli addendi in Logaritmi, eseguire tale somma. Vediamo come comportarci con un esempio: partiamo da un prodotto da calcolare (cosi' facciamo un po' di esercizio), comunque per evidenziare la parte che qui ci interessa la scriveremo in carattere piu' grande.

Calcolare:
3576,8 ·0,00062345=
Trasformo in logaritmo **3576,8**
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1000 e 10.000 il suo valore sara' compreso fra 3 e 4 e quindi la sua caratteristica sara' 3. Leggo sulle tavole:

3576	→	55340	
			12
3577	→	55352	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **12** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.
Se poi guardi la pagina dei logaritmi, trovi una tabellina con intestazione 12; questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 8 corrisponde 9,6

55340 + 9,6 = 553496

e, come gia' visto
Log 3576,8 = 3,553496

Trasformo in logaritmo **0,00062345**
Prima fisso la caratteristica: il numero e' compreso fra 1/1000 (10^{-3}) ed 1/10.000 (10^{-4}) e la sua caratteristica e' tra -3 e -4 e devo prendere il minore -4 (essendo la mantissa sempre positiva) oppure, regola mnemonica, ci sono 4 zeri prima della prima cifra significativa, quindi la sua caratteristica sara' $\bar{4}$
Considero le prime 4 cifre 6234 e considero l'ultima cifra 5 come decimale, leggo sulle tavole:

6234	→	79477	
			7
6235	→	79484	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **7** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.

Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 7 questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 5 corrisponde 3,5

79477+3,5 = 794805 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma

e quindi
Log 0,00062345 = $\bar{4}$**,794805**

Quindi ora abbiamo:
Log(3576,8 · 0,00062345) =
= Log3576,8 + Log0,00062345 =
= 3,553496 + $\bar{4}$**,794805 =**
Sommo normalmente incolonnando secondo la virgola e ricordando che $\bar{4}$ e' negativo

$$\begin{array}{rl} 3,553496 & + \\ \bar{4},794805 & = \\ \hline 0,348301 & \end{array}$$

= 0,348301
Prima della virgola ottengo 0 perche' devo sommare $\bar{4}$ (-4) con + 3 e con +1 di riporto

b. Differenza (CoLogaritmo)

Se utilizziamo la proprieta' che nei logaritmi un quoziente puo' essere trasformato in una differenza, dovremo poi, una volta trasformati gli addendi in Logaritmi, eseguire tale differenza.
C'e' pero' un problema: la mantissa del logaritmo non deve mai essere negativa, quindi dovremo renderla positiva lasciando la parte negativa solamente nella caratteristica
Tale operazione si chiama:

Cologaritmo

Vediamo come comportarci con un esempio.
Supponiamo di aver ottenuto il valore per il logaritmo
-3,468901 (con il segno meno davanti lo trasformo nel cologaritmo nel modo seguente:

- Aumento di 1 la caratteristica e vi metto un trattino sopra per ricordare che e' un numero negativo:
  $3 \rightarrow \bar{4}$
- Nella mantissa faccio il complemento a 9 di tutte le cifre (sostituisco ogni cifra con quello che gli manca per farla diventare 9

$4 \rightarrow 5$
$6 \rightarrow 3$
$8 \rightarrow 1$
$9 \rightarrow 0$
$0 \rightarrow 9$
$1 \rightarrow 8$
$468901 \rightarrow 531098$

Quindi:
$-3{,}468901 = \bar{4}{,}531098$

Anche qui partiamo da un quoziente da calcolare (cosi' facciamo un po' di esercizio aggiuntivo); poi, per evidenziare la parte che qui ci interessa, la scriveremo in carattere piu' grande.
Vediamo due casi

- Il sottraendo e' maggiore di 1
- Il sottraendo e' minore di 1

---

1) Calcolare:
5768900 : 1234,5=
Trasformo in logaritmo **5768900**
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1.000.000 (10^6) e 10.000.000 (10^7), il suo valore sara' compreso fra 6 e 7 e quindi la sua caratteristica sara' 6 leggo sulle tavole:

5678	→	75420	
			7
5679	→	75427	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **7** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.
Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 7; questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla

mantissa: a 9 corrisponde 6,3
75427+6,3 = 754333
quindi
Log 5768900 = 6,754333

Trasformo in logaritmo **1234,5**
Prima fisso la caratteristica: il numero e' compreso fra 1000 (10^3) e 10.000 (10^4) quindi la sua caratteristica e' 3. Leggo sulle tavole:

1234	→	09132	
			35
1235	→	09167	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **35** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.
Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 35 questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 5 corrisponde 17,5 :
09167+17,5 = 091845 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma
e quindi
Log 1234,5 = 3,091845
Quindi ora abbiamo:
Log(5768900 : 1234,5) = Log5768900 - Log 1234,5 = 6,754333 - 3,091845 =
Ora, per avere la mantissa positiva passo al cologaritmo:
= 6,754333 + $\bar{4}$,908154 =
Sommo normalmente incolonnando secondo la virgola e ricordando che $\bar{4}$ e' negativo

$$\begin{array}{ll} 6{,}754333 & + \\ \bar{4}{,}908154 & = \\ \hline 3{,}661487 & \end{array}$$

= 3,661487
Prima della virgola ottengo 3 perche' devo sommare $\bar{4}$ (-4) con + 6 e con +1 di riporto.

---

2) Calcolare:
64,537: 0,00062345=
Trasformo in logaritmo **64,537**
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 10 e 100 il suo valore sara' compreso fra 1 e 2 e quindi la sua caratteristica sara' 1. Leggo sulle tavole:

6453	→	80976	
			7
6454	→	80983	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **7** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.
Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 7 questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 7 corrisponde 4,9:

80983+4,9 = 809879
e quindi:

Log 64,537 = 1,809879
Trasformo in logaritmo **0,00062345**
Prima fisso la caratteristica: il numero e' compreso fra 1/1000 (10^{-3}) ed 1/10.000 (10^{-4}) e la sua caratteristica e' tra -3 e -4 e devo prendere il minore -4 (essendo la mantissa sempre positiva) oppure, regola mnemonica, ci sono 4 zeri prima della prima cifra significativa quindi la sua caratteristica sara' $\bar{4}$.
Considero le prime 4 cifre 6234 e considero l'ultima cifra 5 come decimale; leggo sulle tavole:

6234	→	79477	
			7
6235	→	79484	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **7** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.

Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 7, questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 5 corrisponde 3,5

79477+3,5 = 794805 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma e quindi
Log 0,00062345 = $\bar{4}$,794805
Quindi ora abbiamo:
Log(64,537: 0,00062345) = Log 64,537 - Log 0,00062345 = 1,809879+ $\bar{4}$,794805 =
Sommo normalmente incolonnando secondo la virgola e ricordando che $\bar{4}$ e' negativo

$$\begin{array}{lc} 1{,}809879 & + \\ \bar{4}{,}794805 & = \\ \hline \bar{2}{,}604684 & \end{array}$$

= $\bar{2}$,604684
Prima della virgola ottengo $\bar{2}$(-2) perche' devo sommare $\bar{4}$ (-4) con + 1 e con +1 di riporto.

---

(3) Trasformare un Logaritmo nel numero corrispondente

Dopo aver trasformato i numeri in logartmi ed aver fatto i calcoli, dobbiamo tornare a scrivere il numero risultante nella sua normale forma decimale,; quindi, come si dice, dovremo fare l'**antilogaritmo** . Anche qui vediamo 2 esempi diversi: uno con i logaritmi a 5 decimali ed uno con i logaritmi a 7 decimali

- Mantissa a 5 decimali
- Mantissa a 7 decimali

1) Cerchiamo:
AntiLog $\bar{3}$,512736 =
Essendo la caratteristica $\bar{3}$ il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1/1000 e 1/100, quindi con 3 zeri prima della prima cifra significativa.
La mia mantissa a 5 decimali e' compreso fra i numeri:

51268	→	3256	
			14
51282	→	3257	

	14
1	1,4
2	2,8
3	4,2
4	5,6
5	7,0
6	8,4
7	9,8
8	11,2
9	12,6

51273,6 - 51268 = 5,6

Di fianco ai due risultati trovi il numero **14** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa; se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 14 come riprodotto qui sulla destra: questi sono i risultati della proporzione ed a 5,6 corrisponde 4.
3256 + 0,4 = 32564 la virgola e' solamente virtuale e serve a sapere come fare la somma; quindi:
AntiLog $\overline{3}$,512376 = 0,0032564 Ho messo 3 zeri prima della prima cifra significativa del numero trovato od anche
$10^{4,512376} = 0,0032564$

Nei calcoli finanziari cercherai sempre di fare i calcoli in modo da poter utilizzare i Logaritmi a 7 decimali. Cerchiamo, come esempio:
AntiLog 4,01099495 =
Essendo la caratteristica 4 l' antilogaritmo avra' 5 cifre prima della virgola;
leggo sulle tavole il valore inferiore e superiore della mantissa:

0109780	→	10256	
			424
0110204	→	10257	

0109949,5 - 0109780 = 169,5 Cerco la tabellina con intestazione 424 e vedo che il decimale piu' vicino a 169,5 e' 4 e quindi :
10256 + 0,4 = 102564 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma e quindi:
AntiLog 4,01099495 = 10256,4
od anche:
$10^{4,01099495} = 10256,4$
Se lo facevo con la calcolatrice ottenevo **AntiLog 4,01099495 = 10256,39999984** anche qui con un margine di errore molto piccolo.

(4) Esercizi di calcolo con l'uso delle tavole

Come conclusione, vediamo un paio di esercizi completi. Scriviamo un prodotto (quoziente) trasformiamone i termini in logaritmi, eseguiamo la somma (differenza) e quindi calcoliamo l'antilogaritmo, cioe' il risultato, tutto con l'uso delle tavole

- Prodotto
- Quoziente

---

1) Calcoliamo:
7,65435 · 0,345675=
Prima trasformo **7,65433** in logaritmo:
Log 7.6543 =
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1 e 10 il suo valore sara' compreso fra 0 ed 1 e quindi la sua caratteristica sara' 0.

Calcolo la mantissa; leggo sulle tavole le prime 4 cifre:

7654	→	88389	
			6
7655	→	88395	

Cerco la tabellina con intestazione 6 e vedo che al decimale 3 corrisponde 1,8 ed a 5 corrisponde 3,0 che essendo un centesimale varra' 0,3 e quindi :
88389 + 1,8 + 0,3 =883911 - la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma e quindi:
Log 7,6543 = 0,883911
Ora trasformo **0,345675** in logaritmo:
Log 0,345675 =
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1 e 1/10, il valore della caratteristica sara' compreso fra 0 e -1 e quindi, dovendo aggiungere una mantissa positiva, considero il valore minore cioe' -1, o meglio la sua caratteristica sara' $\bar{1}$ **.** Regola mnemonica: uno zero davanti alla prima cifra allora caratteristica -1
Calcolo la mantissa; leggo sulle tavole le prime 4 cifre:

3456	→	53857	
			13
3457	→	53870	

Cerco la tabellina con intestazione 13 e vedo che al decimale 7 corrisponde 9,1 ed a 8 corrisponde 11,2 che essendo un centesimale varra' 1,12 e quindi:
53857 + 9,1 + 1,12 =5386722 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma; e quindi:
Log 0,345678 = $\mathbf{\bar{1},5386722}$
ora faccio i calcoli:
Log(7,65435 · 0,345675) = Log 7,65435 + Log 0,345678 =
= 0,883911 + $\mathbf{\bar{1},5386722}$=

$$\begin{array}{lr} 0{,}883911 & + \\ \bar{1}{,}5386722 & = \\ \hline 0{,}4225832 & \end{array}$$

= 0,4225832
Questo e' il risultato in logaritmo; ora devo ritrasformarlo in decimale:
AntiLog 0,4225832 =
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10 , quindi avremo una cifra prima della virgola; la mia mantissa a 5 decimali (42258) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse)

42243	→	2645	
			16
42259	→	2646	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **16** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
42258,32-42243 =15,32
Nella tabellina 16 considero **15,32** ; a **14,4** corrisponde **9** prima cifra decimale ed avanza **1,32** (15,32-14.4=1,32) che (approssimato) corrisponde circa ad 1seconda cifra decimale

quindi:
2645+0,9+0,01 = 264591
ed abbiamo:
AntiLog 0,4225832 = 2,64591

---

2) Calcolare:
6,78955: 0,12345=
Trasformo in logaritmo **6,78955**
Prima fisso la caratteristica: essendo il valore del logaritmo compreso fra 1 e 10 il suo valore sara' compreso fra 0 ed 1 e quindi la sua caratteristica sara' 0.
Leggo sulle tavole:

6789	→	83181	
			6
6790	→	83187	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **6** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.

Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 6 questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: al primo 5 corrisponde 3,0, al secondo 5 corrispondera' 0,3

83181 + 3,0 + 0,3 = 831843

e quindi:
Log 6,78955 = 0,831843

Trasformo in logaritmo **0,12345**
Prima fisso la caratteristica: il numero e' compreso fra 1 (10^0) e 1/10 (10^{-1}) e la sua caratteristica e' tra -1 e 0 e devo prendere il minore -1 (essendo la mantissa sempre positiva) oppure, regola mnemonica, c'e'uno zero prima della prima cifra significativa quindi la sua caratteristica sara' $\overline{1}$
Considero le prime 4 cifre 1234 e considero l'ultima cifra 5 come decimale leggo sulle tavole:

1234	→	09132	
			35
1235	→	09167	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **35** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa.
Se poi guardi la pagina dei logaritmi trovi una tabellina con intestazione 35 questi sono i risultati della proporzione con i vari decimali che basta leggere ed aggiungere alla mantissa: a 5 corrisponde 17,5:

09132+17,5 = 091495 la virgola e' virtuale e ti indica solamente dove fare la somma
e quindi:
Log 0,12345 = $\overline{1}$,091495
quindi ora abbiamo

Log(6,78955 : 0,12345) =
= Log 6,78955 - Log 0,12345 =
= 0,831843 + $\bar{1}$,091495 =
Prima di eseguire la differenza passo al cologaritmo per il secondo termine in modo di poter fare la somma:
CoLog $\bar{1}$,091495 = - ($\bar{1}$,091495)) = + 0,908505
Sommo normalmente incolonnando secondo la virgola

$$\begin{array}{ll} 0,831843 & + \\ 0,908505 & = \\ \hline 1,740348 & \end{array}$$

= 1,740348
Questo e' il risultato in logaritmo, ora devo ritrasformarlo in decimale
AntiLog 1,740348 =
Essendo la caratteristica 1 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 10 e 100 , quindi avremo due numeri prima della virgola.
La mia mantissa a 5 decimali (74034) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse)

74028	→	**5499**	
			5
74036	→	**5500**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **8** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e':
74034,8-74028 = 6,8
Nella tabellina 8 considero **6,8** ; a **6,4** corrisponde **8** prima cifra decimale ed avanza **0,4** (6,8-6,4=0,4) e 0,4 corrisponde a 5seconda cifra decimale quindi:
5499 + 0,8 + 0,05 = 549985
ed abbiamo:
AntiLog 1,740348 = 54,9985

B. Capitalizzazioni

In matematica finanziaria il denaro viene trattato come fosse un bene qualunque, quindi il suo utilizzo commerciale e' finalizzato ad un guadagno derivante dal suo utilizzo.
In questa prima parte vedremo appunto le basi di tale utilizzo:

- interesse
- capitalizzazione frazionata
- sconto
- trasferimento di capitali nel tempo
- problemi piu' comuni

1. Interesse

a) Nomenclatura

Come in tutte le branche della scienza che si occupino di un campo specifico esistono dei termini che sono propri della disciplina e che quindi e' bene evidenziare subito, perche' prima di elaborare la teoria bisogna che sia chiaro il significato dei vocaboli che useremo.

La matematica finanziaria tratta del dare in "uso" il denaro e di come tale uso debba essere retribuito; chiameremo:

Capitale
*la quantita' di denaro che viene considerata in uso e. di solito la indicheremo con **C***

Interesse
*il compenso spettante a chi da' in uso il proprio denaro e verra' indicato con **I*** (I maiuscolo)

Tasso di interesse
la percentuale di interesse sull'unita' di capitale, cioe' l'interesse sulla somma di un euro
(esempio: tasso di interesse del 2% significa che sull'uso di 1 euro pago il 2% cioe' 2 centesimi).
Lo indicheremo con **i** (i minuscolo)

Montante
la somma che percepisco alla fine del periodo considerato, cioe' la somma del capitale iniziale e dell'interesse ottenuto.
(Montante=Capitale+Interesse)
Lo indicheremo con la lettera **M**

b) Regime di interesse semplice

Come abbiamo detto l' **Interesse I** e' il compenso spettante a chi da' in uso il proprio denaro.

---

(1) Determinazione della formula

Come abbiamo detto l' **Interesse I** e' il compenso spettante a chi da' in uso il proprio denaro.

Se qualcuno ha del denaro che al momento non utilizza puo' prestarlo ricevendo in cambio un compenso; questo puo' essere fatto a livello personale, oppure consegnando il denaro ad una banca che pensera' ad utilizzarlo.
Successivamente, quando il denaro sara' necessario, sara' possibile ritiralo dalla banca ed in aggiunta al capitale versato la banca fornira' un interesse.
Tale interesse dovra' essere proporzionale al capitale versato, ed al tempo in cui tale capitale e' stato a disposizione della banca.

Interesse proporzionale al capitale significa che se raddoppio il capitale deve raddoppiare l'interesse, se triplico il capitale devo triplicare anche l'interesse...

Interesse proporzionale al tempo significa che se raddoppio il tempo deve raddoppiare l'interesse, se triplico il tempo devo triplicare anche l'interesse...

Quindi otteniamo subito la formula:

$$I \sim C \cdot t$$

Cioe' l'interesse e' proporzionale al prodotto del capitale impiegato per il tempo intercorso fra il versamento ed il prelievo.

La proporzione si trasformera' in uguaglianza mettendo un opportuno termine moltiplicativo costante dopo l'uguale:
$I = \text{costante} \cdot C \cdot t$
Tale costante sara' il cosiddetto ***Tasso di interesse*** cioe' l' interesse percentuale pagato sulla somma di 1 euro in 1 anno che indichiamo con **i**, quindi la formula per l'interesse semplice e':

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Il tasso di interesse verra' indicato indifferentemente sia come frazione che come decimale.
Ad esempio un tasso **i** del **3%** od anche **$i = 0{,}03$** e questo significa che per l'impiego per 1 anno di 1 euro ricevero' un compenso di 3 centesimi.
L'unita' di tempo, a meno di diverse indicazioni, sara' per noi di 1 anno.
Comunque sono usati anche tassi specifici per periodi diversi dall'anno (tasso mensile, bimestrale, trimestrale,...): molto usato ad esempio e' il tasso semestrale, cioe' il compenso che spetta a chi da' in uso 1 euro per 6 mesi.

(2) Capitalizzazione semplice

Utilizzando l'interesse semplice, parleremo di **regime ad interesse semplice** oppure **capitalizzazione semplice** e, questo regime, di solito verra' usato per periodi brevi (operazioni a breve scadenza) :

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Quindi il tempo di solito sara' inferiore ad 1 anno ed utilizzando un tasso di interesse annuale, sorge il problema di come indicarlo. Potremo considerare l'anno commerciale di 360 giorni (calcoli piu' semplici) oppure l'anno civile di 365 giorni, e naturalmente, considereremo frazioni di anno.
Ad esempio per considerare un tempo di 45 giorni:
utilizzando l'anno commerciale considereremo la frazione 45/360
utilizzando l'anno civile considereremo la frazione 45/365
Se non specificato, intenderemo l'anno commerciale.

Esempio 1: calcolare l'interesse dato da un capitale di 10000 euro impiegato per 3 mesi ad un tasso annuo del 2%
Dati:
$i = 0{,}02$
C= 10000€
$t = 3$ mesi $= 3/12 = 1/4 = 0{,}25$
Applico la formula:
$I = C \cdot i \cdot t = 10000€ \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}25 = 50€$
L'interesse corrisposto sara' di 50 €

Esempio 2: calcolare l'interesse dato da un capitale di 6000 euro impiegato per 70 giorni ad un tasso annuo del 1,5%.
Utilizziamo l'anno commerciale di 360 giorni.
Dati:
i = 0,015
C= 6000€
t = 70 giorni = 70/360 = 0,1944444
Applico la formula:
I = C·i·t = 6000€·0,015·0,1944444 = 17,499996 arrotondato al centesimo **19,50€**
L'interesse corrisposto sara' di € 19,50
Da notare che ho arrotondato (fare link come si arrotonda) .
Se utilizzavo l'anno civile avrei avuto:
t=70/365 = 0,1917808
I = C·i·t = 6000€·0,015·0,1917808 = 17,260272 arrotondato al centesimo **19,26€**
Con l'anno civile l'interesse corrisposto sara' di € 19,26 .

Un problema da tenere in conto negli esercizi e' l'approssimazione: se le cifre decimali sono poche, allora avremo che il dato risultante puo' essere falsato; mentre, se il dato decimale e' troppo lungo, avremo un appesantimento dei calcoli: una discreta approssimazione si ottiene considerando 7 cifre decimali; quindi, se dovremo fare i calcoli noi, non avendo una calcolatrice disponibile, approssimeremo i dati decimali alla settima cifra.

(3) Formule inverse

Consideriamo la formula:

$$\mathbf{I = C\,i\,t}$$

e' la formula per trovare l'interesse conoscendo il capitale, il tasso ed il tempo.
Nella formula sono presenti 4 quantita', se io ne conosco 3 posso sempre trovare la quarta

---

cioe':
se conosco il capitale **C**, il tasso **i** e l'interesse **I** posso trovare il tempo **t**
se conosco il capitale **C**, il tempo **t** e l'interesse **I** posso trovare il tasso **i**
se conosco il tempo **t**, il tasso **i** e l'interesse **I** posso trovare il capitale **C**

Bastera' considerare le cosiddette formule inverse; esse sono:

- Per trovare il tempo **t**

$$\mathbf{t = \frac{I}{C\,i}}$$

Ecco i passaggi:

Partiamo dalla formula dell'interesse semplice
i = C i t
Lo scrivo a rovescio:
(posso farlo per la proprieta' simmetrica delle uguaglianze: se a=b allora b=a)
C i t = I
Siccome devo trovare t divido da entrambe le parti per Ci
Cioe' divido entrambe i membri per tutto quello che, nel primo termine, e' diverso da t:

$$\frac{C\,i\,t}{C\,i} = \frac{I}{C\,i}$$

Semplifico prima dell'uguale ed ottengo in questo modo che al primo termine resta solamente t:

$$t = \frac{I}{C\,i}$$

Esempio:

Ho impiegato un capitale di 5000 euro al tasso del 3% ed ho ricevuto un interesse di 50 euro; per quanto tempo e' stato impiegato il capitale?

C = 5000€

i = 3% = 0,03

I = 50 €

Basta applicare la formula:

$$\mathbf{t = \frac{I}{C\,i} = \frac{50}{5000 \cdot 0{,}03} = \frac{50}{150} = 0{,}333333}$$

La frazione si riferisce al periodo di un anno, consideriamo per semplicita' l'anno commerciale (360 giorni): vale la proporzione:

360 : 1 = x : 0,333333

cioe' se 360 giorni corrispondono ad 1 allora x giorni corrispondono a 0,0333333

risolvo la proporzione e trovo la x:

$$\mathbf{x = \frac{360 \cdot 0{,}333333}{1} = 120}$$

Ho impiegato il mio capitale per **120** giorni (oppure 4 mesi: un mese commerciale e' di 30 giorni)

Usando l'anno civile di 365 giorni avrei avuto la proporzione:

365 : 1 = x : 0,333333

cioe' se 365 giorni corrispondono ad 1 allora x giorni corrispondono a 0,0333333

risolvo la proporzione e trovo la x:

$$\mathbf{x = \frac{365 \cdot 0{,}333333}{1} = 121{,}6666545}$$

che approssimo a 122 giorni

Quindi utilizzando l'anno civile avrei impiegato il mio capitale per 122 giorni

---

- Per trovare il tasso di interesse **i**

$$\mathbf{i = \frac{I}{C\,t}}$$

Ecco i passaggi:

Partiamo dalla formula dell'interesse semplice

i = C i t

Lo scrivo a rovescio:

(posso farlo per la proprieta' simmetrica delle uguaglianze: se a=b allora b=a)

C i t = I

Siccome devo trovare **i** divido da entrambe le parti per Ct

Cioe' divido entrambe i membri per tutto quello che, nel primo termine, e' diverso da i:

$$\frac{C\,i\,t}{C\,t} = \frac{I}{Cti}$$

Semplifico prima dell'uguale ed ottengo in questo modo che al primo termine resta solamente i:

$$i = \frac{I}{Cti}$$

Esempio:

Ho impiegato un capitale di 8000 euro per 80 giorni ed ho ricevuto un interesse di 50 euro; a che tasso di interesse e' stato impiegato il capitale?

Usiamo l'anno commerciale (360 giorni)

C = 8000€

t = 80/360 = 0,2222222
I = 50 €
Basta applicare la formula:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Ct}} = \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{8000 \cdot 0,2222222}} = \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{1777,77776}} = \mathbf{0,028125}$$

Il tasso di interesse (approssimato) e' circa del 2,8% cioe' i = 0,028

- Per trovare il Capitale

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{i\,t}}$$

Ecco i passaggi:

Partiamo dalla formula dell'interesse semplice
i = C i t
Lo scrivo a rovescio:
(posso farlo per la proprieta' simmetrica delle uguaglianze: se a=b allora b=a)
C i t = I
Siccome devo trovare **C** divido da entrambe le parti per it
Cioe' divido entrambe i membri per tutto quello che, nel primo termine, e' diverso da C:

$$\frac{C\,i\,t}{i\,t} = \frac{I}{it}$$

Semplifico prima dell'uguale ed ottengo in questo modo che al primo termine resta solamente C:

$$C = \frac{I}{it}$$

Esempio:

Ho impiegato una certa somma per 100 giorni ed ho ricevuto un interesse di 60 euro; sapendo che il tasso di interesse utilizzato e' del 2% a quanto ammonta il capitale impiegato?
Usiamo l'anno commerciale (360 giorni)
t = 100/360 = 0,2777778
I = 60 €
i = 2% = 0,02
Basta applicare la formula:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{it}} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{0,02 \cdot 0,2777778}} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{0,00555554}} = \mathbf{10800,030240085}$$

Il capitale impiegato e' 10800 €

(4) Montante ad interesse semplice

Il ***Montante M*** e' cio' che viene restituito alla fine del periodo di capitalizzazione a chi ha dato in uso il proprio denaro.
Quindi il montante sara' dato dal capitale iniziale piu' l'interesse maturato:

$$\mathbf{M = C + I}$$

Ricordando che l'interesse **I** e' dato da:
I = C i t
Otteniamo:
M = C + C i t =
Raccolgo **C** ed ottengo la formula:

$$\mathbf{M = C\,(\,1 + it)}$$

Il fattore **1+it** si chiama **fattore di capitalizzazione semplice** ed e' il montante sulla somma di 1 euro impiegata per 1 anno

---

Esempio:
Impiego un capitale di 6000 euro per 8 mesi al tasso del 2%; calcolare il montante
Dati:
C = 6000 €
i = 2% = 0,02
t = 8 mesi = 8/12 = 0,6666666
Applico la formula: **M = C(1+it) = 6000 (1 + 0,02·0,6666666) = 6000 (1 + 0,013333332) = 6000·1,013333332 = 6079,999992**
Approssimo e quindi il montante e' di **6080 €**

Possiamo, conoscendo il montante, il tasso ed il tempo, ricavare il valore del capitale; abbiamo:

$$\mathbf{C = \frac{M}{1 + it}}$$

Tale formula servira' a risolvere il problema: Quale somma bisogna utilizzare ad un dato tasso e per un dato tempo per costituire un montante **M**;

Esempio:
Fra un anno mi serviranno 10000 €; quanto devo impiegare ora la tasso del 4% per poter fra un anno disporre di tale somma?
Abbiamo i dati:
M = 10000 €
i = 4% = 0,04
t = 1
Basta applicare la formula:

$$\mathbf{C = \frac{M}{1 + it} = \frac{10000}{1 + 0,04 \cdot 1} = \frac{10000}{1,04} = 9615,3846154}$$

Arrotondo a 9615,38 €

(5) Approssimazione (cenni)

Come ho gia' detto considereremo, se non esplicitamente esposto, sette cifre decimali che ci possono dare una discreta approssimazione, anche se, oggi come oggi, mediante l'uso dei computer, possiamo utilizzare quante cifre decimali vogliamo

Per approssimare utilizzeremo questa semplice regola:
- Se oltre la cifra decimale che ci interessa le cifre restanti sono uguali o superiori a 5, 50, 500, 5000,... allora aumenteremo di 1 la cifra decimale
- Se oltre la cifra decimale che ci interessa le cifre restanti sono inferiori a 5, 50, 500, 5000,... allora lasceremo com'e' la cifra decimale

Esempi:
- Approssimare **125,345234564936** alla settima cifra decimale
oltre la settima cifra decimale ho le cifre **64936** essendo tale numero superiore a **50000** approssimero' a **125,3452346**

- Approssimare **325,3455** alla terza cifra decimale
oltre la terza cifra decimale ho la cifra **5** essendo tale numero uguale a **5** approssimero' a **325,346**

- Approssimare **12507,4378425€**
Essendo euro devo appossimare al centesimo, cioe' alla seconda cifra decimale
oltre la seconda cifra decimale ho le cifre **78425** essendo tale numero superiore a **50000** approssimero' a **12507,43€**

- Approssimare **85,24532654986** alla settima cifra decimale
oltre la settima cifra decimale ho le cifre **4986** essendo tale numero inferiore a **5000** approssimero' a **85,2453265**

- Approssimare **21500,432378425€**
Essendo euro devo appossimare al centesimo, cioe' alla seconda cifra decimale
oltre la seconda cifra decimale ho le cifre **2378425** essendo tale numero inferiore a **5000000** approssimero' a **21500,43€**

(6) Alcuni esempi

Vediamo ora alcuni esercizi di ricapitolazione sugli argomenti fatti

---

- calcolo dell'interesse con tempo in mesi
- calcolo dell'interesse con tempo in giorni, anno commerciale
- calcolo dell'interesse con tempo in giorni, anno civile
- calcolo del tempo con anno sia commerciale che civile
- calcolo del tasso di interesse con anno sia commerciale che civile
- calcolo del capitale con anno sia commerciale che civile
- calcolo del montante

Calcolo dell'interesse con tempo in mesi

Ho versato in banca la somma di euro 20000, per 5 mesi al tasso i = 1,5%. Quale interesse mi sara' corrisposto dalla banca?
Dati
C = 20000€
i = 1,5% = 0,015
t = 5 mesi = 5/12 = 0,4166667
Applico la formula
I = C i t = 20000€·0,015·0,4166667 = 125,00001
Approssimo ed ottengo:
L'interesse corrisposto e' di 125€

Calcolo dell'interesse, tempo in giorni anno commerciale

Ho versato in banca la somma di euro 15000, per 215 giorni al tasso i = 1,75%. Quale interesse mi sara' corrisposto dalla banca?
Dati
C = 15000€
i = 1,75% = 0,0175
t = 215 giorni = 215/360 = 0,5972222
Applico la formula
I = C i t = 15000€·0,0175·0,5972222 = 156,7708333
Approssimo ed ottengo:
L'interesse corrisposto e' di euro 156,77

Calcolo dell'interesse, tempo in giorni anno civile

Ho versato in banca la somma di euro 12000, per 145 giorni al tasso i = 1,25%. Quale interesse mi sara' corrisposto dalla banca?
Dati
C = 12000€
i = 1,25% = 0,0125
t = 145 giorni = 145/365 = 0,3972603
Applico la formula
I = C i t = 12000€·0,0125·0,3972603 = 59,5890411
Approssimo ed ottengo:
L'interesse corrisposto e' di euro 59,59

Calcolo del tempo sia come anno commerciale che come anno civile

Ho versato in banca la somma di euro 14000, al tasso i = 1,2% e mi e' stato corrisposto un interesse di euro 49,50; per quanto tempo e' stato utilizzato il capitale?
Dati:
C = 14000€
i = 1,2% = 0,012
I = 49,50€
Basta applicare la formula :

$$\mathbf{t = \frac{I}{Ci} = \frac{49,50}{14000 \cdot 0,012} = \frac{49,50}{168} = 0,294642857}$$

Adesso distinguiamo tra anno commerciale (360 giorni) ed anno civile (365 giorni)

- Anno commerciale (360 giorni): vale la proporzione:
  360 : 1 = x :0,294642857
  cioe' se 360 giorni corrispondono ad 1 allora x giorni corrispondono a 0,294642857
  risolvo la proporzione e trovo la x:
  $$\mathbf{x = \frac{360 \cdot 0,294642857}{1} = 106,0714285}$$
  Ho impiegato il mio capitale per **106** giorni

- Anno civile (365 giorni): vale la proporzione:
  365 : 1 = x :0,294642857
  cioe' se 365 giorni corrispondono ad 1 allora x giorni corrispondono a 0,294642857
  risolvo la proporzione e trovo la x:
  $$\mathbf{x = \frac{365 \cdot 0,2946429}{1} = 107,5446585}$$
  Ho impiegato il mio capitale per **108** giorni

Calcolo del tasso di interesse sia con anno commerciale che con anno civile

Ho impiegato un capitale di 20000 euro per 110 giorni ed ho ricevuto un interesse di 130 euro; a che tasso di interesse e' stato impiegato il capitale?

- Usiamo prima l'anno commerciale (360 giorni)
  Dati:
  C = 20000€
  t = 110/360 = 0,3055556
  I = 130 €
  Basta applicare la formula:

$$\mathbf{i = \frac{I}{Ct} = \frac{130}{20000 \cdot 0,3055556} = \frac{130}{6111,112} = 0,021272724}$$

Il tasso di interesse (approssimato) e' circa del 2,13% cioe' i = 0,0213

- Usiamo ora l'anno civile (365 giorni)
  Dati:
  C = 20000€
  t = 110/365 = 0,3013699
  I = 130 €
  Basta applicare la formula:
  $$\mathbf{i = \frac{I}{Ct} = \frac{130}{20000 \cdot 0,3013699} = \frac{130}{6027,398} = 0,021568179}$$
  Il tasso di interesse (approssimato) e' circa del 2,16% cioe' i = 0,0216

Calcolo del capitale con anno sia commerciale che civile

Ho impiegato un capitale per 130 giorni al tasso i=1,6% ed ho ricevuto un interesse di 110 euro; a quanto ammonta il capitale?

- Usiamo prima l'anno commerciale (360 giorni)
  Dati:
  i = 1,6% = 0,016
  t = 130/360 = 0,3611111
  I = 110 €
  Basta applicare la formula:
  $$\mathbf{C = \frac{I}{it} = \frac{110}{0,016 \cdot 0,3611111} = \frac{110}{0,0057778} = 19038,388313891}$$
  Il Capitale impiegato (approssimato) e' 19038,39 €

- Usiamo ora l'anno civile (365 giorni)
  Dati:
  i = 1,6% = 0,016
  t = 130/365 = 0,3561644
  I = 110 €
  Basta applicare la formula:
  $$\mathbf{C = \frac{I}{it} = \frac{110}{0,016 \cdot 0,3561644} = \frac{110}{0,0056986} = 19302,986698487}$$
  Il Capitale impiegato (approssimato) e' 19302,99€

Calcolo del Montante

Per calcolare il Montante ad interesse semplice si puo' calcolare prima l'interesse poi sommarlo al capitale, comunque e' possibile anche applicare direttamente la formula

---

E' stato impiegato un capitale di euro 20000 per 4 mesi al tasso del 1,5%;
calcolare il montante.
Dati:
C = 20000€
t = 4 mesi = 4/12 = 0,33333333
i = 1,5% = 0,015
Basta applicare la formula:

M = C (1+it)
M = 20000(1+0,015·0,3333333) = 20000(1+0,005) = 20000·1,005 = 20100,00€
Ho ottenuto un montante di euro 20100,00

Abbiamo visto che e' possibile trovare la formula inversa per trovare il capitale, conoscendo il montante **M** ed il fattore di montante **1+it** (quindi **i** e **t**); allora sono possibili anche esercizi del tipo:
E' stato impiegato un capitale **C** al tasso **i = 2%** per **6 mesi**; avendo ottenuto un montante di euro **20200** si chiede l'importo del capitale iniziale.
Dati;
M = 20200€
t = 6 mesi = 6/12 = 0,5
i = 2% = 0,02
Basta applicare la formula:

$$\mathbf{C = \frac{M}{1+it} = \frac{20200}{1+0,02\ \cdot 0,5} = \frac{20200}{1+0,01} = \frac{20200}{1,01} = 20000}$$

Il capitale iniziale era di 20000 €

Naturalmente e' possibile avere il tempo in giorni e quindi usare l'anno commerciale e l'anno civile, ma il procedimento e' comunque sempre lo stesso

(7) Rappresentazioni grafiche

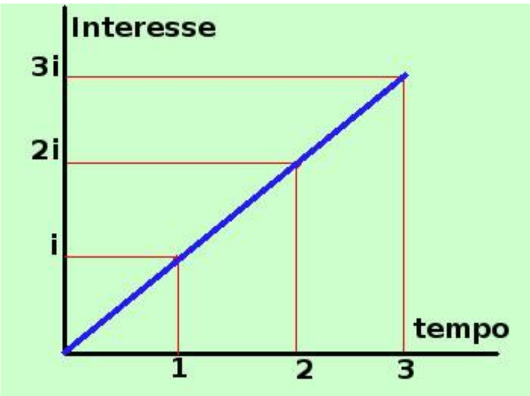
E' possibile rappresentare graficamente le funzioni finanziarie

- Interesse semplice
- Montante ad interesse semplice

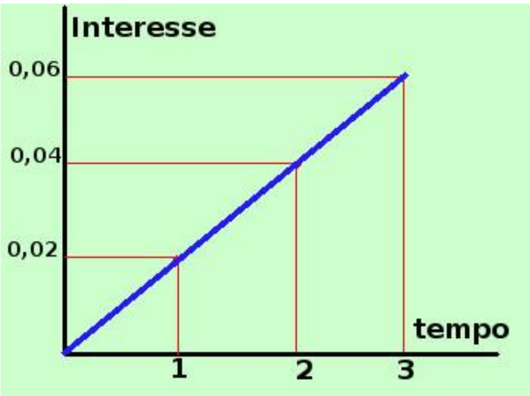
a. Rappresentazione grafica dell'interesse semplice

Consideriamo la formula dell'interesse semplice:
I = C i t
Per semplicita' considero il capitale **C** costituito da 1 euro, cosi' possiamo toglierlo dalla formula. Per avere poi il risultato finale per un capitale **C** bastera' moltiplicare quello che otteniamo per **C:**
I = i t
Se consideriamo fisso il tasso **i,** abbiamo che l'interesse **I** dipende dal tempo **t** cioe' l'interesse e' **funzione lineare** del tempo (cioe' piu' tempo impiego il capitale e maggiore e' l'interesse, se raddoppio il tempo raddoppia l'interesse, se triplico il tempo triplica l'interesse,...)
Esiste quindi una proporzionalita' diretta fra il tempo e l'interesse e tale proporzionalita' puo' essere rappresentata in un piano cartesiano come una retta passante per l'origine di equazione:
y = m x
con
y uguale all'interesse **I**
x uguale al tempo **t**
ed **m** (coefficiente angolare) uguale a **i**
Quindi e' possibile rappresentare graficamente come varia l'interesse al variare del tempo e la rappresentazione grafica e' sempre data da una retta passante per l'origine.

Siccome il tempo non puo' andare all'indietro allora noi cosidereremo solamente il tempo positivo e quindi la semiretta che parte dall'origine.
Quindi il grafico di **I = i t** e' dato da:

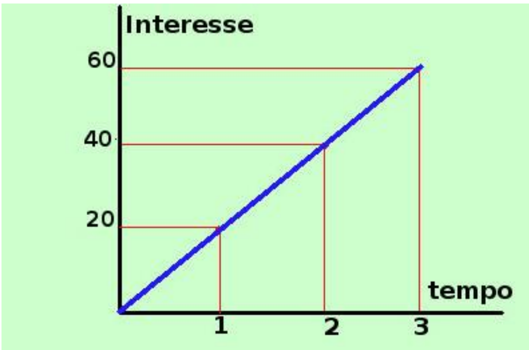


Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora I= i·0 = 0)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo l'interesse i (se t=1 allora I= i·1 = i)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo l'interesse 2i (se t=2 allora I= i·2 = 2i)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo l'interesse 3i (se t=3 allora I= i·3 = 3i)
....
Avevamo detto che l'interesse semplice viene usato per periodi inferiori all'anno e il perche' lo vedremo piu' avanti; ma per ora consideriamolo valido anche per periodi superiori all'anno.
Vediamo ora un esempio pratico.
Rappresentiamo graficamente l'interesse, sempre per un capitale di 1 euro impiegato al tasso del 2% (i = 0,02)



Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora I= i·0 = 0)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo l'interesse 0,02 cioe' 2 centesimi (se t=1 allora I= 0,02·1 = 0,02€)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo l'interesse 0,04 cioe' 4 centesimi (se t=2 allora I= 0,02·2 = 0,04€)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo l'interesse 0,06 cioe' 6 centesimi (se t=3 allora I= 0,02·3 = 0,06€)
....
Da notare che abbiamo usato un grafico con due scale diverse per l'orizzontale e la verticale, questo devi sempre farlo per poter evidenziare al meglio le cartteristiche del grafico che rappresenti .

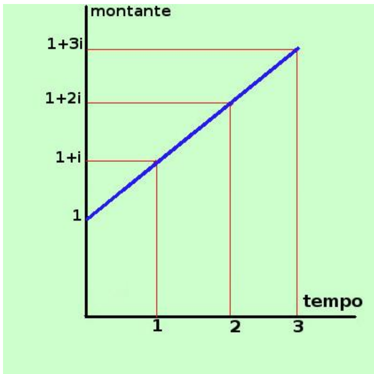
Se il capitale e' diverso da 1 euro si procede in questo modo Rappresentiamo graficamente l'interesse, per un capitale di 1000 euro impiegato al tasso del 2% (i = 0,02)



Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora I= 1000·i·0 = 0)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo 20 euro (se t=1 allora I= 1000·0,02·1 = 20,00€)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo 40 euro (se t=2 allora I= 1000·0,02·2 = 40,00€)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo 60 euro (se t=3 allora I= 1000·0,02·3 = 60,00€)
....

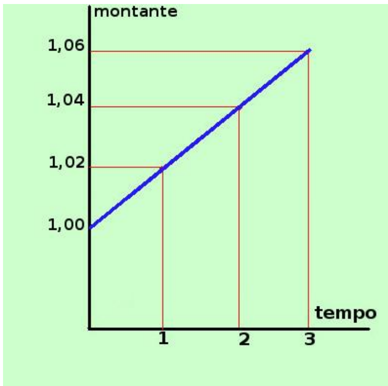
b. Rappresentazione grafica del montante ad interesse semplice

Consideriamo la formula del montante ad interesse semplice:
M = C (1+i t)
Consideriamola come:
M = C + C i t
Per semplicita' considero il capitale **C** costituito da 1 euro, cosi' possiamo toglierlo dalla formula. Per avere poi il risultato finale per un capitale **C** bastera' moltiplicare quello che otteniamo per **C**
M = 1 + i t
Se cosideriamo fisso il tasso **i** abbiamo che il montante **I** dipende dal tempo **t** e tale dipendenza puo' essere rappresentata in un piano cartesiano come una retta nel piano di equazione
y = m x + 1
con
y uguale al Montante **I**
x uguale al tempo **t**
ed **m** (coefficiente angolare) uguale a **i**
Quindi e' possibile rappresentare graficamente come varia l'interesse al variare del tempo e la rappresentazione grafica e' sempre data da una retta passante per il punto **(0;1)**
Siccome il tempo non puo' andare all'indietro allora noi cosidereremo solamente il tempo positivo e quindi la semiretta che parte dal punto (0:1)
Per disegnare subito il grafico basta osservare che corisponde alla formula dell'interesse vista nella pagina precedente aumentata di 1, quindi basta spostare verso l'alto tutto il grafico di 1
Quindi il grafico di **I = i t** e' dato da:



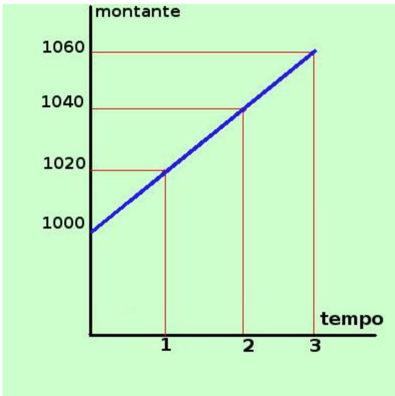
Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora M= 1 + i·0 = 1)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo il montante 1+i (se t=1 allora M = 1 + i·1 = 1+i)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo il montante 1+2i (se t=2 allora M = 1 + i·2 = 1+2i)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo il montante 1+3i (se t=3 allora M = 1 + i·3 = 1 + 3i)
....

Vediamo ora un esempio pratico.
Rappresentiamo graficamente l'interesse, sempre per un capitale di 1 euro impiegato al tasso del 2% (i = 0,02)



Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora I= i·0 = 0)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo l'interesse 0,02 cioe' 2 centesimi (se t=1 allora I= 0,02·1 = 0,02€)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo l'interesse 0,04 cioe' 4 centesimi (se t=2 allora I= 0,02·2 = 0,04€)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo l'interesse 0,06 cioe' 6 centesimi (se t=3 allora I= 0,02·3 = 0,06€)
....
Da notare che per farti vedere meglio il grafico in verticale ho messo lo spazio fra l'origine ed 1 molto inferiore a quello che sarebbe effettivamente, come ti ho gia' detto puoi fare queste cose, se non danno luogo ad equivoci, per poter evidenziare al meglio le cartteristiche del grafico che rappresenti.

Se il capitale e' diverso da 1 euro si procede in questo modo Rappresentiamo graficamente il montante, per un capitale di 1000 euro impiegato al tasso del 2% (i = 0,02)



Al'inizio (tempo 0) non avremo nessun interesse (se t=0 allora M= 1000·(1+i·0) = 1000,00€)
Al tempo 1 (dopo 1 anno) avremo un montante di 1020 euro (se t=1 allora M = 1000·(1+0,02·1) = 1000·(1,02) = 1020,00€)
Al tempo 2 (dopo 2 anni) avremo un montante di 40 euro (se t=2 allora M= 1000·(1+0,02·2) = 1000·(1+0,04) = 1000·1,04 = 1040,00€)
Al tempo 3 (dopo 3 anni) avremo un montante di 60 euro (se t=3 allora M= 1000·(1+0,02·3) = 1000·(1+0,06) = 1000·1,06 = 1060,00€)
....

c) Regime ad interesse composto

Se metto dei soldi in banca, al 31 dicembre mi viene corrisposto un interesse: di solito tale interesse non viene ritirato ma viene aggiunto al capitale venendo cosi' a formare il nuovo capitale su cui calcolare l'interesse per il prossimo anno e cosi' di anno in anno.
Tale metodo viene chiamato **regime ad interesse composto** e, di solito, viene utilizzato per periodi superiori all'anno.

- Determinazione della formula
- Capitalizzazione composta
- Formule inverse
- Calcolo dell'interesse **I**
- Rappresentazioni grafiche

(1) Determinazione della formula

Per semplicita' supponiamo di considerare per ora l'anno come misura intera, cioe' di versare, ad esempio, in banca un capitale il primo gennaio; vedremo succesivamente come adattare poi i dati a periodi frazionari.

Facciamo un esempio pratico; consideriamo numeri molto semplici anche se lontani dalla realta'.
Supponiamo di impiegare un capitale di **1000** euro al tasso del **10%** (**I=0,10**) per **2** anni avremo:

tempo	Valore
dopo 1 anno	$M_1 = C(1+i) = 1000(1+0,10) = 1000 \cdot 1,1 = 1100$€
dopo 2 anni	$M_2 = M1(1+i) = 1100(1+0,10) = 1100 \cdot 1,1 = 1211$€

Cioe' il secondo anno l'interesse e' calcolato sul montante del primo anno (1100 euro) e pertanto anche sull' interesse gia' maturato viene calcolato l'interesse per il nuovo anno.
Vediamo quindi di trovare la formula generale .

Se impiego un capitale C ad un dato tasso per un anno alla fine dell'anno, otterro' il montante M_1 :
$M_1 = C(1+i)$ (essendo 1 anno il tempo vale 1)
Lascio i soldi in banca; M_1 diventa il nuovo capitale ed alla fine del secondo anno otterro' il montante M_2 .
$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
Lascio i soldi in banca; M_2 diventa il nuovo capitale ed alla fine del terzo anno otterro' il montante M_3
$M_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)$
e cosi' via posso continuare. Quindi abbiamo:

primo anno	$M_1 = C(1+i)$
secondo anno	$M_2 = C(1+i)^2$
terzo anno	$M_3 = C(1+i)^3$
quarto anno	$M_4 = C(1+i)^4$
....	....

Quindi per un numero t di anni avremo la formula:

$$M_t = C(1+i)^t$$

Per gli esercizi possiamo procedere in modi diversi:

- Se il numero di anni e' piccolo (ad esempio 2) possiamo calcolare il montante per il primo, poi il montante per il secondo anno.
- Possiamo applicare la formula e, con una buona calcolatrice (io uso la calcolatrice in dotazione al computer) trovare il risultato con oun'approssimazione alla decima cifra decimale (metodo consigliato)
- Possiamo applicare la formula e utilizzare le tavole a 7 cifre decimali utilizzando il metodo visto per l'interpolazione in modo da avere un errore dell'ordine di 1 su un milione (un centesimo ogni diecimila euro).
- Possiamo utilizzare un prontuario per i calcoli finanziari

Per il calcolo basta una buona calcolatrice in cui vi siano anche le potenze **tasto x^y**; una volta per periodi di anni lunghi venivano usati i logaritmi, oggi, almeno per questa formula, non ne vedo l'utilita' e il loro utilizzo costituirebbe ormai, secondo me, solamente un inutile appesantimento della materia; comunque. se a qualcuno puo' interessare, ho aggiunto all'inizio di matematica finanziaria alcune pagine sull'uso delle tavole logaritmiche
Vediamo, a scopo didattico, un esercizio risolto nei quattro modi

Esercizio

Calcolare il montante di un capitale di 20000 euro impiegato al tasso del 2% per 2 anni.
Dati:
C = 2000€
i = 2% = 0,02
numero di anni = t = 6

- Capitalizzazioni successive
  Calcolo il montante per il primo anno:
  $M_1 = C(1+i) = 2000 \cdot(1+0,02) = 2000 \cdot(1,02) = 2040$
  Ora calcolo il montante per il secondo anno (il nuovo capitale e' il montante appena trovato (chiamiamolo C_1):
  $M_2 = C_1(1+i) = 2040 \cdot(1+0,02) = 2040 \cdot(1,02) = 2080,80$
  Il montante vale **€ 2080,80**

- Uso della calcolatrice
  Basta applicare la formula
  $M_t = C(1+i)^t = 2000(1+0,02)^2 = 2000(1,02)^2 = 2000\cdot 1,0404 = 2080,80$
  Il montante vale **€ 2080,80**

- Uso dei logaritmi
  $M_t = C(1+i)^t = 2000(1+0,02)^2$
  Calcolo la potenza coi logaritmi
  $\text{Log } (1+0,02)^2 = 2\cdot \text{Log } 1,02 = 2\cdot 0,0086002 = 0,0172004$
  Trasformo il numero in Logaritmo,
  leggo sulle tavole $\text{Log } 1,02 = 2\cdot 0,0086002$
  Quindi:
  $= 2\cdot 0,0086002 = 0,0172004$
  Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
  AntiLog 0,0172004 =
  Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola.
  La mia mantissa a 7 decimali (0172004) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse)

0172003	→	10404	
			418
0172421	→	10405	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **418** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa, mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e':
0172004-0172003 = 1

1 rispetto a 432 e' talmente piccolo che posso pensare che le ulteriori due cifre decimali siano 0 quindi ottengo:
AntiLog 0,0172004 = 1,0404
e, calcolando il montante
$M_t = 2000 \cdot 1,0404 = 2080,80$ €

- Uso di un prontuario di calcoli finanziari
  $M_t = C(1+i)^t = 2000(1+0,02)^2$
  Cerco la tavola "montante di 1 euro dopo *n* anni"
  Cerco la colonna con il tasso del 2% e su di essa scelgo 2 anni e leggo **1,04040000.**
  Questo e' il montante per 1 euro al tasso del 2% per 2 anni, quindi ora posso fare
  $M_t = C(1+i)^t = 2000(1+0,02)^2 = 2000 \cdot 1,04040000 = 2080,80$ €

(2) Capitalizzazione composta

Abbiamo trovato la formula per la capitalizzazione per un numero intero di anni
$M_t = C(1+i)^t$

Se il numero di anni non e' intero si procede in questo modo:

- Per il periodo di anni interi si usa la capitalizzazione ad interesse composto
- Per il periodo di anno non intero si usa la capitalizzazione ad interesse semplice

---

Esempio:
Ho lasciato in banca per 5 anni e 4 mesi la somma di euro 10000 al tasso del 2% (i=0,02). Quanto e' il montante?
Dati:
C = 10000€
i= 0,02
t = 5 anni e 4 mesi
Calcolo il montante ad interesse composto alla fine dei 5 anni $M_5 = c(1+i)^5 = 10000\,(1+0,02)^5 = 10000\,(1,02)^5 = 10000 \cdot 1,1040808 = 11040,808$
Ora calcolo la capitalizzazione di M_5 ad interesse semplice per 4 mesi
$t=1/3=0,3333333$
$M = M_5(1+it) = 11040,808\,(1+0,02 \cdot 0,3333333) = 11040,808(1+0,0066667) = 11040,808 \cdot 1,006666 = 11114,406026128$
Approssimo a **11114,41€**
Il montante finale e' di euro 11114 e 41 cents

(3) Formule inverse

Data la formula per la capitalizzazione composta per un numero intero di anni
$M_t = C(1+i)^t$

Possiamo ricavarne le formule inverse.
Essendo la formula composta di 4 dati **M**, **C**, **i** e **t** possiamo, conoscendo 3 dei dati, trovare il dato mancante.

Per trovare **M** il problema non si pone perche' e' la formula che gia' abbiamo, invece dobbiamo trovare le formule per trovare **C**, **i** e **t** considerando noti gli altri 3 dati

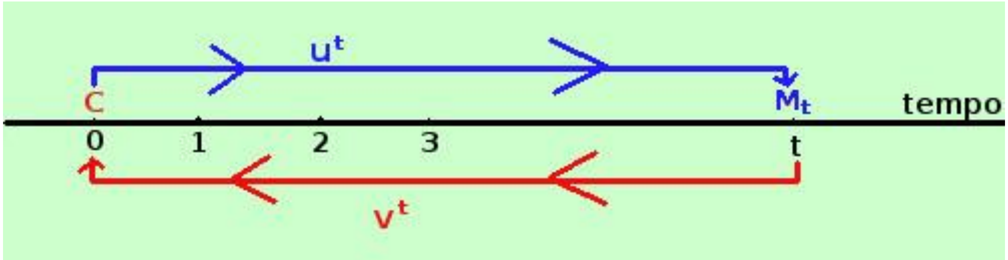
- Calcolo di **C**
- Calcolo di **i**
- Calcolo di **t**

a. Calcolo di C

Partiamo dalla formula della capitalizzazione composta:
$M_t = C(1+i)^t$
Vogliamo ricavare C
Leggo la formula alla rovescia:
$C(1+i)^t = M_t$
Per ricavare **C** divido entrambe i termini per $(1+i)^t$, al primo termine resta **C:**

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{M_t}}{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}}}$$

Abbiamo che, moltiplicando **C** per il termine $(1+i)^t$, esso diventa il montante **M** ed anche dividendo il montante **M** per il termine $(1+i)^t$ esso diventa **C.**
Quindi possiamo considerare $(1+i)^t$ come un fattore che moltiplicando ci sposta il capitale **C** in avanti negli anni per un tempo **t**; mentre, dividendo per esso, avremo che il montante torna indietro nel tempo per **t** anni fino a diventare **C**



Data l'importanza dell'argomento chiameremo il termine $1/(1+i)^t$ come v^t mentre chiameremo u^t il termine $(1+i)^t$

$$\mathbf{u^t} = (\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}} \qquad\qquad \mathbf{v^t} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}}}$$

Esercizio:
Ho in banca un montante di € 12749,17; sapendo che il tasso e' i=1,75% e che il capitale e' stato versato esattamente 14 anni fa calcolare quale capitale e' stato versato

b. Calcolo di i

Partiamo sempre dalla formula della capitalizzazione composta:
$M_t = C(1+i)^t$
Vogliamo ricavare **i**
Leggo la formula alla rovescia:
$C(1+i)^t = M_t$
Prima ricavo $(1+i)^t$; divido entrambe i termini per **C** :

$$(1+i)^t = \frac{M_t}{C}$$

Per togliere l'esponente **t** passo ai Logaritmi decimali, cosi' poi posso usare le proprieta' dei logaritmi sulle potenze:

$$\text{Log}(1+i)^t = \text{Log}\frac{M_t}{C}$$

Ora trasformo la potenza in prodotto ed il quoziente in differenza:

$t \cdot \text{Log}(1+i) = \text{Log}\, M_t - \text{Log}C$

Divido tutto per t ed ottengo:

$\text{Log}\,(1+i) = \frac{\text{Log}M_t - \text{Log}\,C}{t}$

Possiamo utilizzare questa formula: una volta applicata dovremo trovare l'antilogaritmo e togliere 1 dal risultato:

$i = \text{AntiLog}\left[\frac{\text{Log}M_t - \text{Log}\,C}{t}\right]^{-1}$

Come vedi la formula e' piuttosto complicata e, per applicarla, devo:
trasformare i numeri in Logaritmi, eseguire la sottrazione (e quindi devo fare il cologaritmo); infine, eseguiti i calcoli, devo fare l'antilogaritmo e togliere 1 dal risultato un procedimento piuttosto lungo e complicato, quindi in questo caso e' preferibile o l'uso delle tavole finanziarie oppure l'utilizzo della formula del montante utilizzata come equazione.
Infatti partendo dalla formula del montante dividendo per C otteniamo:

$M_t = C(1+i)^t$

$C(1+i)^t = M_t$

$(1+i)^t = \frac{M_t}{C}$

Questa e' la formula che useremo utilizzando le tavole.
Se invece voglio usare la calcolatrice posso fare:

$(1+i)^t = \frac{M_t}{C}$

Per trovare **(1+i)** faccio la radice t-esima da entrambe le parti ed ottengo:

$(1+i) = \sqrt[t]{\frac{M_t}{C}}$

e quindi :

$i = \sqrt[t]{\frac{M_t}{C}} - 1$

Vediamo un semplice esempio con l'uso delle tavole.

Esercizio:

Ho in banca un montante di € 13650,40; sapendo deriva da un capitale di 11.000 euro che e' stato versato esattamente 14 anni fa, calcolare qual'e' il tasso medio che la banca mi ha applicato.
Applico la formula per trovare M/C :

$$(1+i)^t = \frac{M_t}{C} = \frac{13650{,}40}{11000} = 1{,}240945455$$

Ora sulle tavole dei montanti **$(1+i)^n$** scorro le righe 14 fino a trovare un valore inferiore e superiore a 1,240945455; trovo:
1,23175573 → 0,015 (1,50%)
1,27491682 → 0,0175 (1,75%)
Quindi faccio l'interpolazione

1,23175573	**0,015**
1,240945455	**y_0**
1,27491682	**0,0175**

$$y_0 = \frac{(1,240945455 - 1,23175573) \cdot (0,0175 - 0,015)}{(1,27491682 - 1,23175573)} + 0,015 = 0,015532292$$

Quindi approssimando posso dire che il tasso medio e' stato **i=0,0155** cioe' dell' **1,55%**

Vediamo lo stesso esempio con l'uso di una calcolatrice.
Ho in banca un montante di € 13650,40; sapendo deriva da un capitale di 11.000 euro che e' stato versato esattamente 14 anni fa calcolare qual'e' il tasso medio che la banca mi ha applicato.
Partiamo dalla formula:

$$i = \sqrt[t]{\frac{M_t}{C}} - 1$$

$$i = \sqrt[14]{\frac{13650,40}{11000}} - 1 =$$

Imposto l'operazione sulla calcolatrice ricordando che per fare la radice 14-esima basta elevare ad 1/14 il radicando con il tasto **x^y.**
Questo e' quello che vedo sul display della calcolatrice:

(13650,40:11000)^(1:14)-1

ed ottengo:
= 0,015539034
che approssimo a **i = 0,0155** cioe' **1,55%**

c. Calcolo di t

Partiamo sempre dalla formula della capitalizzazione composta
$M = C(1+i)^t$
Vogliamo ricavare **t**
Leggo la formula alla rovescia:
$C(1+i)^t = M$

Prima ricavo **$(1+i)^t$**; divido entrambe i termini per **C** :

$$(1 + i)^t = \frac{M}{C}$$

Per togliere l'esponente **t** passo ai Logaritmi decimali, cosi' poi posso usare le proprieta' dei logaritmi sulle potenze:

$$\mathrm{Log}(1 + i)^t = \mathrm{Log}\frac{M}{C}$$

Ora trasformo la potenza in prodotto ed il quoziente in differenza

$t \cdot \text{Log}(1+i) = \textbf{Log M - Log C}$

Divido tutto per Log(1+i) ed ottengo:

$$t = \frac{\text{Log M} - \text{Log C}}{\text{Log}(1+i)}$$

Vediamo un semplice esempio con l'uso di una calcolatrice.
Ho in banca un montante di € 13650,40; sapendo che deriva da un capitale di 11.000 euro e che il tasso medio che la banca mi ha applicato e' i= 0,0155 (1,55%), trovare il tempo .
Partiamo dalla formula:

$$t = \frac{\text{Log M} - \text{Log C}}{\text{Log}(1+i)} = \frac{\text{Log } 13650{,}40 - \text{Log } 11000}{\text{Log}(1{,}0155)} =$$

Imposto l'operazione sulla calcolatrice (ti mostro quello che si vede sul display):
(Log 13650,40-Log 11000) : Log 1,0155 =
ed ottengo:
= 14,034986043
Otteniamo 14 anni e 3,5 centesimi di anno cioe' circa 4 anni e 10 giorni (vedremo meglio come calcolare i giorni quando affronteremo i temi non interi) .
Per il calcolo potremmo anche usare le tavole logaritmiche, ma dovremmo comunque usare la calcolatrice poi per eseguire la divisione fra numeratore e denominatore.

(4) Calcolo dell'interesse I

In questo caso il calcolo dell'interesse non ha molta importanza perche' non viene pagato separatamente.
Comunque vediamolo da punto di vista didattico.
L'interesse **I** per un tempo t e' la differenza fra il montante ed il capitale
I = M - C
$\mathbf{I = C(1+i)^t - C}$
Raccolgo C:

$$\mathbf{I = C[(1+i)^t - 1]}$$

Come abbiamo gia' detto il termine $\mathbf{(1+i)^t}$ viene anche indicato come $\mathbf{u^t}$ quindi abbiamo la formula

$$\mathbf{I = C[(u^t - 1]}$$

Anche se non ha riscontro pratico usiamo la formula in un semplice esempio
Ho in banca un montante di € 13650,40; sapendo deriva da un capitale di 11.000 euro impiegato per 14 anni e che il tasso medio che la banca mi ha applicato e' i= 0,0155 (1,55%) calcolare l'interesse
partiamo dalla formula
$\mathbf{I = C\,[(u^t - 1] = 11000\,[(1+0{,}0155)^{14} - 1] =}$

Imposto l'operazione sulla calcolatrice (ti mostro quello che si vede sul display):
11000x((1,0155)^14 -1) =
ed ottengo:
= 2643,06
Otteniamo euro 2643,06

Ho detto che non ha riscontro pratico perche' se voglio l'interesse **I** il metodo piu' semplice per calcolarlo e' fare la differenza fra il montante ed il capitale:

$$I = M - C$$

Nell'esercizio precedente potevo fare:

I = M - C = 13650,40 - 11000 = 2650,40 €

e quindi ottengo l'interesse con maggior velocita' e precisione.

(5) Rappresentazioni grafiche

Come gia' fatto per l'interesse semplice, vediamo la rappresentazione grafica dell'interesse composto

$M = C(1+i)^t$

Per semplicita' consideriamo il capitale di 1 euro, in tal modo la mia formula diventa

$M = (1+i)^t$

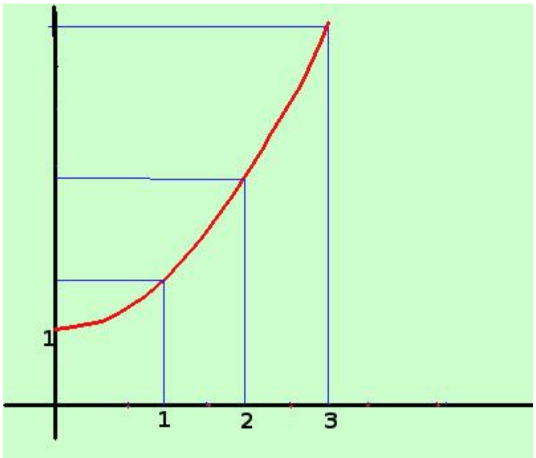
E' una funzione tipo esponenziale

$y = a^x$

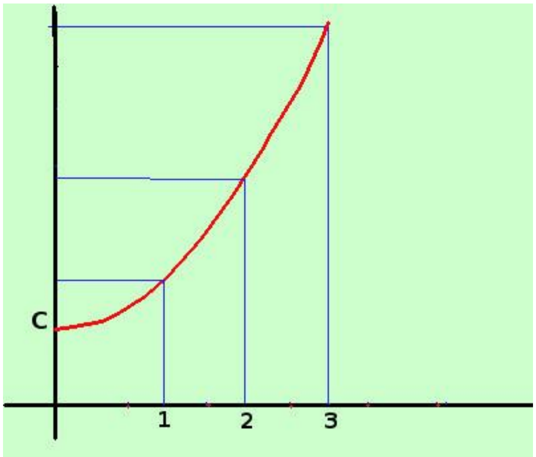
Facciamone la rappresentazione grafica, partendo da 0 in avanti (non possiamo considerare tempi negativi) considerando come esempio il tasso i = 4,0% Leggiamo sulle tavole la colonna del montante $(1+i)^n$ approssimato alla quarta cifra decimale considerando sulle ascisse il valore per tempi interi 1,2,3,.... Partiamo da (0,1) perche' al tempo 0 il capitale 1 euro coincide con il montante

anni	$(1+i)^n$
0	1
1	1,0400
2	1,0816
3	1,1249
4	1,1699
5	1,2167

Per ragioni didattiche considero una curva un po' piu' accentuata per farti meglio capire poi la relazione con il montante ad interesse semplice



Se il capitale invece di 1 euro e' C allora il grafico sull'asse y parte dal valore C



d) Tempi non interi

Se il numero di anni su cui calcoliamo il montante non e' intero, allora abbiamo due modi diversi per calcolare il montante

- Formula lineare
- Formula esponenziale

(1) Formula lineare

E' il metodo piu' semplice ed anche quello piu' vantaggioso per l'utente (vedere la pagina sul confronto fra le capitalizzazioni).
Siccome il montante, nella capitalizzazione composta, viene calcolato alla fine dell'anno si tratta di utilizzare per il numero intero di anni la capitalizzazione composta e, per la frazione di anno residua, la capitalizzazione semplice.

Se ad esempio ho impiegato un capitale per 5 anni e 4 mesi, calcolo il montante a capitalizzazione composta per 5 anni, poi sul risultato applico la capitalizzazione semplice per i 4 mesi residui.

E' anche possibile elaborare la formula completa.
Chiamo $\mathbf{M}_{n+f}$ il montante finale essendo **n** un numero intero di anni ed **f** una frazione di anno.

Prima calcolo il montante per il numero intero n di anni:

$M_n = C\,(1+i)^n$

Calcolo poi il montante per la frazione residua di anno **f** considerando come capitale il montante trovato:

$M_{n+f} = M_n\,(1+if) = C\,(1+i)^n\,(1+if)$

Ho quindi la formula:

$M_{n+f} = C\,(1+i)^n\,(1+if)$

Vediamo un semplice esempio.
Ho investito un capitale di euro 12000 al tasso i=0,02 il giorno 3 Marzo 2010. Calcolare il montante utilizzando la formula lineare al giorno 27 luglio 2014
Si tratta di 4 anni e 145 giorni (vedi come calcolare i giorni.
Prima calcolo il montante per 4 anni (uso le tavole):
$M_4 = 12000 \cdot (1+0{,}02)^4 = 12000 \cdot 1{,}08243216 = 12989{,}18592$
Ora su questa cifra calcolo il montante per 145 giorni (uso l'anno finanziario)
ricordando che 1 giorno = 1/360 di anno abbiamo **f = 146/360 = 73/180**
$M_{4+29/72} = 12989{,}18592 \cdot (1+0{,}2 \cdot 73/180) = 13094{,}54265024 \cong 13094{,}54€$
Negli ultimi calcoli ho usato la calcolatrice.

Calcolare i giorni
Calcolare i giorni dal 3 marzo al 27 luglio
Date due date per calcolare la distanza in giorni fra loro hai due possibilita'

1. calcolo manuale
   Ricordati la filastrocca:
   30 di' conta Novembre
   con April, Giugno e Settembre
   di 28 ce n'e' uno
   tutti gli altri ne han trentuno
   Quindi mese per mese calcola i giorni
   dal 3 al 31 marzo 28 giorni
   Aprile 30 giorni
   Maggio 31 giorni
   Giugno 30 giorni
   Luglio 27 giorni
   Totale 146 giorni
2. calcolo con le tavole
   se consideri le tavole finanziarie trovi la tavola dei giorni trascorsi dall'inizio dell'anno:
   al 3 Marzo trovi il numero 62
   al 27 Luglio trovi il numero 208
   fai la differenza fra 208 e 62 e trovi 146

Sempre sulle tavole puoi trovare la conversione da numero frazionario a numero decimale per 146/360 (si chiama tavola per la conversione di giorni e mesi in decimali di anno) ed ottieni per l'anno commerciale:

$$\frac{\mathbf{146}}{\mathbf{360}} = \mathbf{0,40555}$$

(2) Formula esponenziale

Bastera' semplicemente trasformare il tempo in frazione ed applicare la formula:

$M = C\,(1+i)^t$

Vediamo lo stesso esercizio che abbiamo sviluppato nella pagina precedente con la formula lineare

---

Ho investito un capitale di euro 12000 al tasso i=0,02 il giorno 3 Marzo 2010, Calcolare il montante utilizzando la formula esponenziale al giorno 27 luglio 2014.

Si tratta di 4 anni e 146 giorni.
Uso l'anno finanziario quindi ho per il tempo :

$$\mathbf{1\ anno} = \frac{360}{360}\ \mathbf{e\ quindi\ 4\ anni} = 4 \cdot \frac{360}{360} = \frac{1440}{360}$$

Non mi conviene semplificare la frazione perche' poi, dovendo fare il minimo comune multiplo, dovrei rimoltiplicare :

$$\mathbf{t} = \mathbf{4\ anni\ e\ 146\ giorni} = \frac{1440}{360} + = \frac{146}{360} = \frac{1586}{360}$$

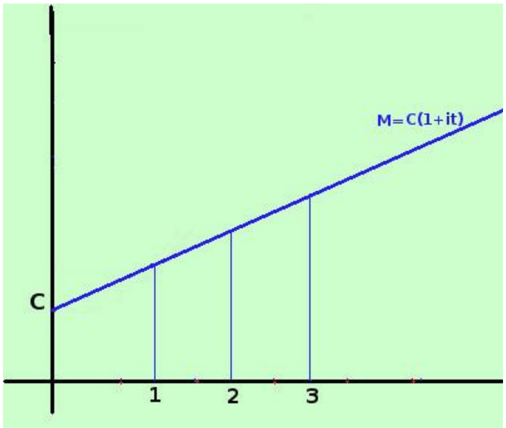
Applico la formula (utilizzo la calcolatrice)
$M = C\,(1+i)^t = 12000 \cdot (1+0{,}02)^{1586/360} = 13093{,}922935076 \cong 13093{,}92$€
Sul visore ho impostato il calcolo:
12000·(1+0,02)^(1586/360)
Da notare che ci sono 58 centesi di euro in meno rispetto al risultato trovato nella pagina precedente

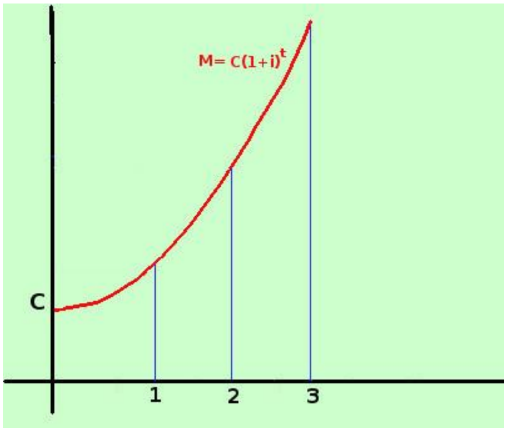
e) Confronto fra interesse semplice e composto

Considero i grafici della capitalizzazione lineare e composta

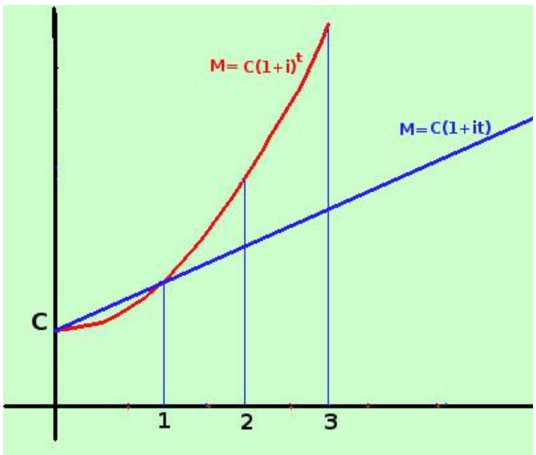
Capitalizzazione lineare
$M = C\,(1+it)$

Capitalizzazione composta
$M = C\,(1+i)^t$





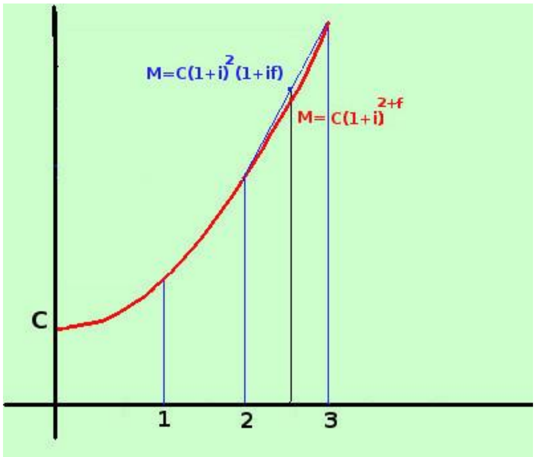
Per vedere meglio come si comportano i grafici, la capitalizzazione composta ha un grafico piuttosto "accentuato" come curvatura
Ora li metto a confronto ed ottengo:



Come vediamo dal grafico per periodi inferiori ad un anno il grafico del montante ad interesse semplice e' superiore al grafico del montante ad interesse composto, allo scadere dell'anno i due montanti hanno lo stesso valore poi, proseguendo, il montante ad interesse composto cresce piu' del montante ad interesse sempice: si dice

il montante ad interesse composto cresce in forma esponenziale
il montante ad interesse semplice cresce in forma lineare (come una retta)

Vediamo infine cosa significa, per tempi non interi, la capitalizzazione composta con la forma lineare e con la forma esponenziale



Mentre con la forma esponenziale calcoli il valore sulla curva rossa, nella forma lineare sostituisci l'ultimo tratto dell'esponenziale con un segmento e vai a calcolare il valore del montante su tale segmento, quindi avrai sempre che, calcolando il momtante con la formula lineare otterrai un valore superiore rispetto al montante calcolato esponenzialmente.

Puoi anche dire che l'esponenziale ha la concavita' verso l'alto, quindi qualunque segmento di retta fra due suoi punti avra' valori superiori rispetto a quelli della curva (e la frazione di capitalizzazione lineare e' un segmento di retta)

f) Alcuni esempi

Vediamo, prima di procedere, alcuni esercizi sui vari modi e casi di calcolo possibili, relativi alla capitalizzazione composta, dividendoli per argomento.

Anche se a scuola non ve la fanno usare noi faremo sempre l'esercizio inizialmente con la calcolatrice, poi utilizzeremo il metodo piu' opportuno, ricordando che la calcolatrice ci dara' sempre il risultato piu' vicino al valore effettivo, senza troppe approssimazioni.
Cio' ci sara' anche utile perche', confrontando i risultati, potremo capire se abbiamo svolto giustamente l'esercizio.

Esercizi sul calcolo del montante ad interesse composto

TEMPO INTERO

– Esercizio n 1

Esercizio sul calcolo del montante ad interesse composto per tempi interi con valori sulle tavole

Si impiega il capitale di € 12600 per 3 anni ad interesse composto al 2,50%.
Calcolarne il montante nei vari modi possibili e confrontare i risultati.

Dati
C = 12600,00 €
t = 3
i = 2,50% = 0,025

Eseguo l'esercizio nei vari modi possibili:

1. Calcolo per tre volte il montante ad interesse semplice
   alla fine del primo anno avro'
   $M_1 = C\,(1+i) = 12600{,}00\,€\cdot(1+0{,}025) = 12600{,}00\,€\cdot(1{,}025) = 12915{,}00\,€$
   alla fine del secondo anno avro'
   $M_2 = M_1\,(1+i) = 12915{,}00\,€\cdot(1{,}025) = 13237{,}875\,€$
   alla fine del terzo anno avro'
   $M_3 = M_2\,(1+i) = 13237{,}875\,€\cdot(1{,}025) = 13568{,}821875\,€ \cong 13568{,}82\,€$
   Il montante e' di **€ 13568,82**
2. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   $12600\cdot(1+0{,}025)^3$
   ottengo **13568,821875** che approssimo a **13568,82**
   Il montante e' di **€ 13568,82**
3. utilizzo le tavole logaritmiche a 7 decimali

---

in alcuni testi si applica il logartmo all'intera espressione; io non sono molto d'accordo perche' trasformando il capitale in logaritmo si puo' avere un errore che, per quanto piccolo, si aggiungera' all'errore che si ha calcolando il fattore $(1+i)^n$. Percio' preferisco calcolare solamente questo ultimo fattore e poi moltiplicare il risultato per il capitale .

$M = 12600(1+0{,}025)^3$
Calcolo il fattore $(1+0{,}025)^3$ coi logaritmi; per la proprieta' dei logaritmi ho
$\text{Log}\,(1+0{,}025)^3 = 3\cdot\text{Log}\,1{,}0250 =$
trasformo il numero in Logaritmo
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 1,0250 = 0,0107239**
Quindi
$= 3\cdot 0{,}0107239 = 0{,}0321717$
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,0321717 =
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
la mia mantissa a 7 decimali (0321717) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse a 7 decimali)

0321350 → 10768
404
0321754 → 10769

Di fianco ai due risultati trovi il numero **404** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
0321717-0321350 = 367
Nella tabella del 404 cerco 367;
il numero minore piu' vicino e' 363,6 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 9
mi resta 367-363,6 = 4,6; ma tale cifra e' tanto esigua rispotto a 404 che la trascureremo (calcolando la settima cifra otterremmo zero)
quindi scrivo

Antilog 0,0321717 = 1,07689
e, calcolando il montante
M = 12600·1,07689 = 13568,814 € che approssimo a **€13568,81**
Il montante e' di **€ 13568,81**

4. utilizzo le tavole del prontuario per il fattore $(1+i)^n$
$1{,}0250^3 = 1{,}07689063$
e quindi
M = 12600·1,07689063 = 13568,821938 €che approssimo a **€13568,82**
il montante e' di **€ 13568,82**

Tutti i metodi hanno dato lo stesso risultato ad eccezione del calcolo con i logaritmi in cui la differenza (peraltro trascurabile) di 1 centesimo e' dovuto all'errore derivante dall'interpolazione.

- Esercizio n 2

Calcolo del montante ad interesse composto per tempi interi con tasso non sulle tavole
Si impiega il capitale di € 20000 per 18 anni ad interesse composto al 2,673%.
Calcolarne il montante nei vari modi possibili e confrontare i risultati

---

In questo caso abbiamo un numero di anni tale da farci scartare a priori il calcolo diretto, inoltre il tasso non e' sulla tavole

---

Dati
C = 20000,00 €
t = 18
i = 2,60% = 0,02673

Eseguo l'esercizio nei vari modi possibili:

1. Come gia' accennato scarto il metodo del calcolo del montante come prodotto di capitalizzazioni semplici perche' 18 anni renderebbero il calcolo troppo lungo.
2. Utilizzo la calcolatrice
Imposto, sullo schermo il calcolo
$20000\cdot(1+0{,}02673)^{18}$
ottengo **32154,55687637** che approssimo a **32154,56**
Il montante e' di **€ 32154,56**
3. Utilizzo le tavole logaritmiche a 7 decimali

Anche in questo esercizio calcolo solamente il fattore $(1{,}02673)^{18}$ e poi moltiplichero' il risultato per il capitale .

$M = 20000(1+0{,}02673)^{18}$
Calcolo il fattore $(1+0{,}02673)^{18}$ coi logaritmi; per la proprieta' dei logaritmi ho
$\text{Log}\,(1{,}02673)^{18} = 18\cdot\text{Log}\,1{,}02673 =$
trasformo il numero in Logaritmo
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **10267,3** e' compreso fra **10267** e **10268** quindi devo fare l'interpolazione

10267,0	→	**0114436**	
10267,3	→	**0114436+x**	**423**
10268,0	→	**0114859**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **428** che corrisponde alla differenza fra i due valori trovati mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'

102673-102670 = 3
Nella tabella del 423 a 3 corrisponde 126,9 e questo e' il mio x
quindi scrivo
0114436 + 126,9 = 0114562,9 = 01145629 la virgola ti indica solo come eseguire la somma
Log 1,02673 = 0,01145629
Quindi
Log $(1+0{,}2673)^{18} = 18 \cdot \mathrm{Log}(1{,}02673) = 18 \cdot 0{,}01145629 = 0{,}20621322$
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,20621322 =
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa
prima della virgola
la mia mantissa nella tavola a 7 decimali (20621322) non c'e'(il tempo 18 anni e' troppo elevato) e quindi considero 5 cifre 20621,322 e cerco fra i logaritmi normali leggo sulle tavole a 5 decimali e trovo

$$\begin{array}{lcll} 20602 & \rightarrow & 20629 & \\ & & & 27 \\ 1607 & \rightarrow & 1608 & \end{array}$$

Di fianco ai due risultati trovi il numero **27** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
20621,322-20608 = 15,322
Nella tabella del 27 cerco 15,322;
il numero minore piu' vicino e' 13,5 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 5
mi resta 15,322-13,5 = 1,822; sposto di un posto la virgola e cerco la settima cifra decimale
Nella tabella del 27 cerco 18,22;
siccome non prendero' altre cifre perche' l'errore supererebbe il valore della cifra trovata stavolta prendo la cifra piu' vicina
il numero piu' vicino e' 18,9 cui corrisponde la settima cifra del nostro numero, cioe' 7
ottengo **160757** quindi scrivo
Antilog 0,20621322 = 1,60757
e, calcolando il montante
M = 20000·1,60757 = 32151,4 €
il montante e' di **€ 32151,4**

4. Utilizzo le tavole del prontuario per il fattore $(1+i)^n$
stavolta il valore e' compreso fra due valori:
tasso del 2,50% per 18 anni → 1,55965872
tasso del 2,75% per 18 anni → 1,62956973
per trovare il mio valore faccio l'interpolazione

$$\begin{array}{lcl} 0{,}02500 & \rightarrow & 1{,}55965872 \\ 0{,}02673 & \rightarrow & 1{,}55965872+x \\ 0{,}02750 & \rightarrow & 1{,}62956973 \end{array}$$

Faccio la proporzione:

(1,62956973-1,55965872):0,00250 = x : (0,02673-0,02500)

0,06991101 : 0,00250 = x : 0,00173

$$x = \frac{0{,}06991101 \cdot 0{,}00173}{0{,}00250} = 0{,}048378419$$

quindi ottengo:

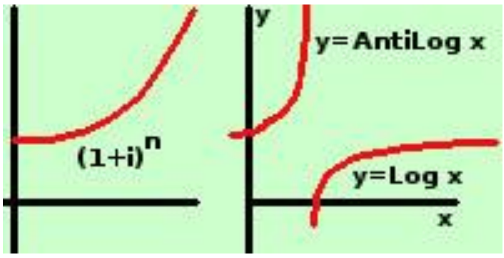
$(1.02673)^{18}$= (1,55965872+0,048378419) = 1,608037139

e quindi

M = 20000·1,608037139 = 32160,7427784 €che approssimo a **€32160,75**

il montante e' di **€ 32160,75**

In questo ultimo esercizio gli errori sono piuttosto rilevanti: il metodo migliore, che da' il risultato piu' preciso, comunque, e' sempre quello dell'utilizzo di una calcolatrice per calcoli finanziari, segue quello dell'uso dei logaritmi e quindi quello dell'interpolazione fra i tassi nelle tavole finanziarie che avra' sempre un errore dovuto all'utilizzo dell'interpolazione



L'errore e' dovuto all'interpolazione fra i tassi ed all'interpolazione per calcolare logaritmo ed antilogaritmo.
Infatti la curva che rappresenta il tasso di interesse ha la concavita' rivolta verso l' alto e quindi avranno sempre un errore in eccesso
Nel logaritmo abbiamo due interpolazioni diverse:
La prima, nel passaggio dal numero al logaritmo avra' un errore in difetto, avendo la funzione logaritmo la concavita' rivolta verso il basso
La seconda nel passaggio dal logaritmo al numero avra' un errore in eccesso avendo la funzione inversa del logaritmo (antilogaritmo) la concavita' rivolta verso l'alto
Quindi con l'uso dei logaritmi i due errori in parte si compenseranno a vicenda.

- Esercizio n 3

Esercizio sul calcolo del montante ad interesse composto per tempi interi eccedenti i valori delle tavole e tassi non sulle tavole

Si impiega il capitale di € 2600 per 125 anni ad interesse composto al 2,90%.
Calcolarne il montante.

Dati

C = 2600,00 €

t = 125

i = 2,90% = 0,0290

In questo caso abbiamo un numero di anni che eccede il tempo che troviamo sulle tavole, inoltre il tasso non e' sulla tavole: possiamo utilizzare 3 metodi

I. Calcolo il montante direttamente con la calcolatrice
II. utilizzo i logaritmi
III. Con le tavole calcolo prima il montante per i primi 100 anni poi, considerato tale montante come capitale ricalcolo il montante per i residui 25 anni; diventa un esercizio doppio, inoltre, non essendo il tasso sulle tavole devo fare due interpolazioni il che mi rende l'esercizio lungo e complicato come calcoli.

per queste ragioni non eseguiremo questo esercizio con le tavole

A scopo didattico eseguo l'esercizio nei due modi indicati:

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   $2600 \cdot (1+0{,}029)^{125}$
   ottengo **92660,618185847** che approssimo a **92660,62**
   Il montante e' di **€ 92660,62**
2. Utilizzo le tavole logaritmiche a 7 decimali

Calcoliamo solamente $(1+0{,}029)^{125}$ e poi moltiplichiamo il risultato per il capitale

---

$M = 2600(1+0{,}029)^{125}$
Calcolo il fattore $(1+0{,}029)^3$ coi logaritmi; per la proprieta' dei logaritmi ho
$\text{Log } (1+0{,}029)^{125} = 125 \cdot \text{Log } 1{,}0290 =$
trasformo il numero in Logaritmo
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 1,0290 = 0,0124154**
Quindi
$= 125 \cdot 0{,}0124154 = 1{,}551925$
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 1,551925 =
Essendo la caratteristica 1 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 10 e 100, quindi avremo due cifre significative prima della virgola
la mia mantissa nella tavola a 7 decimali (20628936) non c'e'(il tempo 125 anni e' troppo elevato) e quindi approssimo a 55192,5 e cerco fra i logaritmi normali
leggo sulle tavole a 5 decimali e trovo

55182 → 55194

12

3563 → 3564

Di fianco ai due risultati trovi il numero **12** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
55192,5-55182 = 10,5
Nella tabella del 12 cerco 10,5;
il numero minore piu' vicino e' 9,6 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 8
mi resta 10,5-9,6=0,9 sposto di un posto la virgola per trovare la settima cifra decimale
Nella tabella del 12 cerco 9;
il numero minore piu' vicino e' 8,4 cui corrisponde la settima cifra del nostro numero, cioe' 7
Non porocedo oltre perche' l'errore sarebbe maggiore del risultato trovato ottengo 356387 quindi scrivo
Antilog 1,551925 = 35,6387
e, calcolando il montante
$M = 2600 \cdot 35{,}6387 = 92660{,}62$ €
il montante e' di **€ 92660,62**

- ***TEMPO NON INTERO***
  - **Esercizio n 4**

Esercizio sul calcolo del montante ad interesse composto per tempi interi con valori sulle tavole

Si impiega il capitale di € 15000 per 2 anni e 8 mesi al 2,50% annuo
Calcolarne il montante nei modi possibili e confrontare i risultati.
Dati
C = 15000,00 €
t = 2 anni e 8 mesi = 2 + 2/3 = 8/3
i = 2,50% = 0,025

Eseguo l'esercizio con i due metodi possibili:

Formula lineare:

- Utilizzo la calcolatrice
  Imposto, sullo schermo il calcolo
  $M_{2+2/3} = 15000(1+0,025)^2(1+0,025\cdot 2/3)$
  ottengo **16022,03125** che approssimo a **16022,03**
  il montante e' di **€ 16022,03**
- Prima calcolo il montante per 2 anni, poi applico a tale montante l'interesse semplice per 8 mesi
  utilizzo le tavole finanziarie per $(1+i)^n$ $(1+0,025)^2 = 1,05062500$
  $M_2 = 15000(1,025)^2 = 15000\cdot 1,05062500 = 15759,375$ €
  Il montante per 2 anni e' di **€ 15759,375**
  Adesso applico la capitalizzazione semplice per 8 mesi
  $M = 15759,375\ (1+0,250\cdot 2/3) = 15759,375\ (1+0,016666667) =$
  $= 15759,375\ (1,016666667) = 16022,031255253$
  Approssimo a **€ 16022,03**

Formula esponenziale

- Utilizzo la calcolatrice
  Imposto, sullo schermo il calcolo
  $15000\cdot(1+0,025)^{8/3}$
  ottengo **16020,94883454** che approssimo a **16020,95**
  il montante e' di **€ 16020,95**
- Utilizzo le tavole logaritmiche a 7 decimali calcolo solamente $(1+0,025)^{8/3}$ e poi moltiplico il risultato per il capitale
  $M = 12600(1+0,025)^{8/3}$
  Calcolo il fattore $(1+0,025)^{8/3}$ coi logaritmi; per la proprieta' dei logaritmi ho
  $\text{Log}\ (1+0,025)^{8/3} = 8/3\cdot \text{Log}\ 1,0250 =$
  trasformo il numero in Logaritmo
  leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 1,0250 = 0,0107239**
  Quindi
  $= 8/3\cdot 0,0107239 = 0,028597067$
  Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
  AntiLog 0,028597067 =
  Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
  la mia mantissa a 7 decimali (0285970,67) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse a 7 decimali)

0285713 → 10680

406

0286119 → 10681

Di fianco ai due risultati trovi il numero **406** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'

0285970,67-0285713 = 257,67

Nella tabella del 404 cerco 257,67;

il numero minore piu' vicino e' 243,6 cui corrisponde l'ottava cifra del nostro numero, cioe' 6

mi resta 257,67-243,60 = 14,06; sposto la virgola di un posto ed approssimo 140,6 circa 141

Nella tabella del 404 cerco 141; il numero piu' vicino e' 121,8 che corrisponde a 4, quindi la nona cifra e' 4

quindi scrivo

Antilog 0,028597067 = 1,068064

e, calcolando il montante

M = 15000·1,068064 = 16020,96 €

Il montante e' di **€ 16020,96**

Da notare che con la formula lineare abbiamo un montante leggermente superiore come avevamo gia' detto.

- Esercizio n 5

Esercizio sul calcolo del montante ad interesse composto per tempi interi con tassi non sulle tavole

Si impiega il capitale di € 10000 per 6 anni e 6 mesi al 2,55% annuo

Calcolarne il montante nei modi possibili e confrontare i risultati

In questo esercizio il tasso e' fuori delle tavole Dati

C = 10000,00 €

t = 6 anni e 6 mesi = 6 + ½ = 13/2

i = 2,55% = 0,0255

Eseguo l'esercizio con i due metodi possibili:

Formula lineare

- Utilizzo la calcolatrice

  Imposto, sullo schermo il calcolo

  $M_{6+½} = 10000(1+0,0255)^{6}(1+0,0255·½)$

  ottengo **11779,212050999** che approssimo a **11779,21**

  il montante e' di **€ 11779,21**

- Prima calcolo il montante per 6 anni, poi applico a tale montante l'interesse semplice per 6 mesi

  utilizzo le tavole finanziarie per $(1+i)^n$

  Essendo il tasso fuori delle tavole lo calcolo per interpolazione

$$\begin{array}{lcl} 0,0250 & \rightarrow & 1,15969342 \\ 0,0255 & \rightarrow & 1,15969342+x \\ 0,02750 & \rightarrow & 1,17676836 \end{array}$$

Faccio la proporzione:

(1,17676836 -1,15969342):(0.0275-0,0250 = x : (0,0255-0,0250)

0,01707494 : 0,0025 = x : 0,0005

$$x = \frac{0,01707494 \cdot 0,0005}{0,0025} = 0,003414988$$

Quindi ottengo:
$(1.0255)^6$= (1,15969342 + 0,003414988) = 1,163108408
e quindi
M = 10000·1,163108408 = 116310,8408 che approssimo a **€ 116310,84**
il montante per 6 anni e' di **€ 116310,84**
Ora calcolo il montante ad interesse semplice per 6 mesi
M_6=11631,08408 (1+ 0.0255·½)= 11779,38040202
che approssimo a **€ 11779,38**
La lieve differenza rispetto al valore precedente e' dovuto all'interpolazione

Formula esponenziale

- Utilizzo la calcolatrice
  Imposto, sullo schermo il calcolo
  $10000\cdot(1+0,0255)^{13/2}$
  ottengo **11778,278540257** che approssimo a **11778,28**
  Il montante e' di **€ 11778,28**
- utilizzo le tavole logaritmiche a 7 decimali calcolo solamente $(1+0,0255)^{13/2}$ e poi moltiplico il risultato per il capitale iniziale
  $M = 10000(1+0,0255)^{13/2}$
  Calcolo il fattore $(1+0,0255)^{13/2}$ coi logaritmi; per la proprieta' dei logaritmi ho
  $\text{Log } (1+0,0255)^{13/2} = 13/2 \cdot \text{Log } 1,0255 =$
  trasformo il numero in Logaritmo
  leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 1,0255 = 0,0109357**
  Quindi
  = 13/2·0,0109357 = 0,07108205
  Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
  AntiLog 0,07108205 =
  Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
  Siccome la mia mantissa non si trova sulle tavole a 7 decimali cerco l'antilogaritmo nelle tavole a 5 decimali la mia mantissa a 5 decimali (07108,205) e' compreso fra i numeri (Leggo le tavole cercando nelle mantisse a 5 decimali)

  07078 → 1177
  37
  07115 → 1178

  Di fianco ai due risultati trovi il numero **37** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
  07108,205-07078 = 30,205
  Nella tabella del 37 cerco 30,205;
  il numero minore piu' vicino e' 29,6 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 8
  mi resta 30,205-29,6 = 0,605; sposto la virgola di un posto 6,05
  Nella tabella del 37 cerco 6,05; il numero piu' vicino e' 3,7 che corrisponde a 1, quindi la settima cifra e' 1
  mi resta 6,05-3,7 = 2,35; sposto la virgola di un posto 23,5

Nella tabella del 37 cerco il numero piu' vicino a 23,5; il numero piu' vicino e' 22,2 che corrisponde a 6, quindi l'ottava cifra e' 6
quindi scrivo
Antilog 0,07108205 = 1,177816
e, calcolando il montante
M = 10000·1,177816 = 11778,16 €
Il montante e' di **€ 11778,16**

Da notare che con la formula lineare abbiamo un montante leggermente superiore come avevamo gia' detto .

Esercizi sul calcolo del capitale nel regime ad interesse composto

TEMPO INTERO

– Esercizio n 1

Esercizio sul calcolo del capitale ad interesse composto per tempi interi

Ho impiegato una somma per 5 anni ad interesse composto al tasso i=2,5% ed oggi ho ricevuto un montante di € 12655,65.
Dite quale somma ho depositato 5 anni fa.
Dati
$M_5 = 12655{,}65$ **€**
$t = 5$
$i = 2{,}50\% = 0{,}025$
Faccio riferimento alla formula

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   12655,65:((1+0,025)^5)
   Ottengo **11185,750514985** che approssimo a **11185,75**
   Il capitale e' di **€ 11185,75**
2. Siccome una divisione fra numeri con molte cifre e' piuttosto laboriosa trasformiamo in logaritmo tutta l'espressione

$$\text{Log } C = \text{Log } \frac{M_5}{(1+0{,}025)^5} = \text{Log } 12655{,}65 - \text{Log}(1{,}025)^5 =$$

$$= \text{Log } 12655{,}65 - 5 \text{ Log}(1{,}025) =$$

Calcolo il primo logaritmo sulle tavole logaritmiche La caratteristica e' 4 essendo il mio numero compreso fra 10000 e 100000
Per calcolare la mantissa cerco 1265,565; tale valore e' compreso fra 1265 e 1266

1265	→	**10209**	
			34
1266	→	**10243**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **34** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
1265,565-1265 = 0,565
Nella tabella del 34 cerco i numeri 5 6 5 spostando per ogni risultato la virgola

$$5 \rightarrow 17{,}0$$
$$6 \rightarrow 2{,}04$$
$$5 \rightarrow 0{,}17$$

quindi

$$\begin{array}{l} 10209 \quad + \\ 17{,}0 \quad + \\ 2{,}04 \quad + \\ 0{,}17 \quad = \\ 10228{,}11 \end{array}$$

quindi scrivo
Log 1265,565 = 4,1022811

Calcolo il secondo logaritmo leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
Log 1,0250 = 0,0107239
Quindi
5Log 1,0250 = 5·0,0107239 = 0,0536195
ed ho
Log 12655,65 - 5 Log(1,025) = 4,1022811 - 0,0536195 = 4,0486616 Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 4,0486616
Essendo la caratteristica 4 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 10000 e 100000, quindi avremo cinque cifre significative prima della virgola
In questo caso, visto il valore della mantissa, posso cercare nelle tavole a 7 decimali la mia mantissa a 7 decimali (0486616) e' compreso fra i numeri (leggo le tavole cercando nelle mantisse a 7 decimali):

$$\begin{array}{lll} 0486360 & \rightarrow & 11185 \\ & & \qquad 388 \\ 0486748 & \rightarrow & 11186 \end{array}$$

Di fianco ai due risultati trovi il numero **388** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
0486616-0486360 = 256
Nella tabella del 388 cerco 256;
un numero minore e' 232,8 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 6
mi resta **256-232,8 = 24,8;**
Sposto di un posto la virgola e nella tabella del 388 cerco 248;
un numero minore e' 232,8 cui corrisponde la settima cifra del nostro numero, cioe' 6
Mi resta **248-232,8 = 16,8;**

Sposto di un posto la virgola e nella tabella del 388 cerco 168;
il numero piu' vicino e' 155 cui corrisponde l'ottava cifra del nostro numero, cioe' 4
Quindi scrivo:
C = AntiLog 4,4,0486616 = 11185,664
e, approssimando
il capitale e' di **€ 11185,66**

Come vedi l'errore dovuto all'interpolazione e' dell'ordine di 10 centesimi di euro: da notare che ho fatto il logaritmo anche del montante e quindi l'errore e' maggiore di quello che si avrebbe facendo solamente il logaritmo del fattore $(1+i)^n$
Per curiosita' calcoliamo con i logaritmi solamente il fattore $(1+i)^n$ e poi dividiamo con la calcolatrice. Vediamo di quanto si riduce l'errore:

$\text{Log}(1.025)^5 = 5\ \text{Log}(1{,}025) =$
Calcolo il logaritmo sulle tavole logaritmiche
Leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 1,0250 = 0,0107239**
Quindi
= 5·0,0107239 = 0,0536195

Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,0536195 =
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
Posso cercare nelle tavole a 7 decimali
la mia mantissa a 7 decimali (0536195) e' compreso fra i numeri (leggo le tavole cercando nelle mantisse a 7 decimali):

0536162	**→**	**11314**	
			384
0536546	**→**	**11315**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **384** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
0536195-0536162 = 33
Nella tabella del 384 cerco 33;
il numero piu' vicino e' 38,4 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 1 (ho scelto il numero piu' vicino perche' non ho intenzione di continuare)
quindi scrivo
$\text{Antilog}\ (1{,}025)^5 = 1{,}13141$
adesso imposto sulla calcolatrice
C= 12655,65 : 1,13141 = 11185,732846625
il capitale e' di **€ 11185,73**

Come vedi confrontando i risultati, l'errore dovuto all'interpolazione si e' ridotto a 2 centesimi (errore dell'ordine di 1 centesimo di euro)
calcolatrice 11185,75
logaritmo 11185,73

– Esercizio n 2

Esercizio sul calcolo del capitale ad interesse composto per tempi interi con tasso non sulle tavole

Ho impiegato un capitale per 18 anni ad interesse composto al 4,865% ed ho ricevuto come montante la somma di € 22225,80.
Calcolare l'ammontare del capitale versato inizialmente.
Dati
M_5 = 22225,80 €
t = 18

i = 4,86% = 0,04865
Faccio riferimento alla formula

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   $22225{,}80:((1+0{,}04865)^{18})$
   ottengo **9451,642809399** che approssimo a **9451,64**
   Il capitale e' di **€ 9451,64**
2.

Una divisione fra numeri con molte cifre e' piuttosto laboriosa, ma abbiamo visto nell'esercizio precedente che l'approssimazione e' troppo elevata; quindi trasformiamo in logaritmo solamente l'espressione $(1{,}0486)^{18}$, calcoliamola poi eseguiamo la divisione con la calcolatrice

---

$\text{Log}(1{,}04865)^{18} = 18 \text{ Log } 1{,}04865 =$
La caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0.
Cerco la mantissa
Leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
Il mio logaritmo 10486,5 e' compreso fra:

10486 → 0206099
414
10487 → 0206513

Di fianco ai due risultati trovi il numero **414** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
10486,5-10486 = 0,5
Nella tabella del 414 a 5 corrisponde 207 quindi lo sommo alla mantissa:
0206099 + 207 = 0206306
Log 1,04865 = 0,0206306
Quindi
$18\text{Log } 1{,}04865 = 18\cdot 0{,}0206306 = 0{,}3713508$
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,3713508
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola.
In questo caso, visto il valore della mantissa, debboo cercare nelle tavole a 5 decimali.
La mia mantissa a 5 decimali (37135,08) e' compreso fra i numeri (leggo le tavole cercando nelle mantisse a 5 decimali):

37125 → 2351
19
37144 → 2352

Di fianco ai due risultati trovi il numero **19** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
37135,08-37125 = 10,08
Nella tabella del 19 cerco 10,08;

il numero minore piu' vicino e' 9,5 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 5.
Mi resta 10,08-9,5 = 0,58; sposto di un posto la virgola e cerco la settima cifra decimale.
Nella tabella del 19 cerco 5,8;
siccome trovo 5,7 che e' molto vicino non prendero' altre cifre
a 5,7 corrisponde3 che sara' la settima cifra del nostro numero
Ottengo **235153** quindi scrivo:
AntiLog 0,3713508 = 2,35153
quindi
C = 22225,80 : 2,35153 = 9451,633617262
e, approssimando
il capitale e' di **€9451,63**

– Esercizio n 3

Esercizio sul calcolo del capitale ad interesse composto per tempi interi con tempo non sulle tavole

Nel 2017 ho ottenuto la somma di € 3637,63 da un vecchio buono fruttifero postale ad interesse composto del 7,75%. Se tale buono e' stato emesso nel 1960 calcolatene il valore iniziale in lire ricordando che il cambio euro→lira e' di 1→1936,27.
Dati
M_5 = 3637,63 €
t = 57
i = 7,75% = 0,0775
Faccio riferimento alla formula :

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

Il tempo non e' sulle tavole perche' per il tasso i=0,0775 il tempo massimo che trovi sulle tavole e' 50 anni

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   3637,63:((1+0,0775)^{57})
   ottengo **51,645635932**
   questo e' il valore in euro: per trovare il valore in lire moltiplico tale importo per 1936,27 ed ottego
   Â£ 99999,895486682 che approssimo a **99999,9**
   o meglio, approssimando alla lira
   il capitale e' di **lire 100000 (centomila)**
2.

Una divisione fra numeri con molte cifre e' piuttosto laboriosa, ma abbiamo visto nel primo esercizio che l'approssimazione e' troppo elevata; quindi trasformiamo in logaritmo solamente l'espressione $(1,0775)^{57}$, calcoliamola poi eseguiamo la divisione con la calcolatrice

---

Log$(1,0775)^{57}$ = 57 Log 1,0775 =
la caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0
cerco la mantissa
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
la mantissa del mio logaritmo e' 0324173
57Log 1,0775 = 57 ·0,0324173 = 1,8477861

Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale):
AntiLog 1,947804
Essendo la caratteristica 1 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 10 e 100, quindi avremo due cifre significative prima della virgola.
In questo caso, visto il valore della mantissa, debbo cercare nelle tavole a 5 decimali la mia mantissa a 5 decimali (84778,61) e' compreso fra i numeri (leggo le tavole cercando nelle mantisse a 5 decimali):

84776 → 7043

6

84782 → 7044

Di fianco ai due risultati trovi il numero **6** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
84778,61-84776 = 2,61
Nella tabella del 6 cerco 2,61; il numero minore piu' vicino e' 2,4 cui corrisponde la quinta cifra del nostro numero, cioe' 4
Mi resta 2,61-2,4 = 0,21; sposto di un posto la virgola e cerco la sesta cifra decimale
Nella tabella del 6 (dalla parte destra) cerco 2,1;
il numero minore piu' vicino e' 1,8 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 3
Mi resta 2,1-1,8 = 0,3; sposto di un posto la virgola e cerco la settima ed ultima cifra decimale
a 3,0 corrisponde esattamente 5 che e' la settima cifra del nostro numero
Ottengo **7044435** quindi scrivo:
AntiLog 1,947804 = 70,44435
Ora eseguiamo la divisione:
~~3637~~,63 : 84,776435 = 51,638349988
Questo e' il valore in euro: dobbiamo trovare il valore il lire pertanto moltiplichiamo tale valore per l'mporto del cambio
51,638349988·1936,27 = 99985,787931892
che approssimiamo a **lire 99985**
il capitale e' di **lire 99985**

- ***TEMPO NON INTERO***
  - **Esercizio n 4**

Esercizio sul calcolo del capitale ad interesse composto per tempi non interi

Ho ottenuto € 16250,80 da un capitale impiegato per 3 anni e 4 mesi al tasso annuo effettivo del 2,50%.
Calcola il capitale.
Dati
M_5 = 16250,80 €
t = 3 anni e 4 mesi = 3 + 4/12 = 3+1/3 = 10/3
i = 2,50% = 0,025
se usiamo la formula esponenziale possiamo fare tranquillamente riferimento alla formula

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo

16250,80:(1+0,025)$^{(10/3)}$
ottengo **14966,785257294**
che approssimo a **14966,79 €**
il capitale e' di **14966,79 €**

2.

Una divisione fra numeri con molte cifre e' piuttosto laboriosa, ma abbiamo visto nel primo esercizio che trasformando tutto in logaritmo l'approssimazione e' troppo elevata; quindi anche qui trasformiamo in logaritmo solamente l'espressione $(1{,}025)^{10/3}$, calcoliamola poi eseguiamo la divisione con la calcolatrice

---

Log(1,025)$^{10/3}$ = 10/3 Log 1,025 =
la caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0
cerco la mantissa
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
la mantissa del mio logaritmo e' 0107239
10/3 Log 1,025 = 10/3 ·0,0107239 = 0,035746333
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,035746333
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
In questo caso, visto il valore della mantissa, posso cercare nelle tavole a 7 decimali la mia mantissa a 7 decimali (0357463,33) e' compreso fra i numeri:

0357098	→	**10857**	
			400
0357498	→	**10858**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **400** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
0357463,33-0357098 = 365,33
Nella tabella del 400 cerco 365,33
Il numero minore piu' vicino e' 360,0 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 9
Mi resta 365,33-360 = 5,33; sposto di un posto la virgola e cerco la settima cifra decimale
Nella tabella del 400 cerco 53,3;
Il numero minore piu' vicino e' 40,0 cui corrisponde la settima cifra del nostro numero, cioe' 1
Mi resta 53,3-40,0 = 13,3; sposto di un posto la virgola e cerco l'ottava ed ultima cifra decimale
Il numero piu' vicino a 133 nella tabella del 400 e' 120 cui corrisponde 3 quindi considero 3 come ottava cifra decimale
Ottengo **10857913** quindi scrivo:
AntiLog 0,035746333 = 1,0857913
Ora eseguiamo la divisione
16250,80 : 1,0857913 = 51,638349988
Questo e' il valore in euro: dobbiamo trovare il valore il lire pertanto moltiplichiamo tale valore per l'mporto del cambio
51,638349988·1936,27 = 14966,780448508
che approssimiamo a **€ 14966,78**
Il capitale e' di **€ 14966,78**

- Esercizio n 5

Esercizio sul calcolo del capitale ad interesse composto per tempi non interi

Ho ottenuto € 1156,25 da un capitale impiegato per 8 anni e 6 mesi e 15 giorni al 2,55% annuo .
Calcolare tale capitale.
Dati
M = 1156,25 €

$$t = 8 \text{ anni} + 6 \text{ mesi} + 15 \text{ giorni} = 8 + \frac{6}{12} + \frac{15}{360} = \frac{2880+180+15}{360} = \frac{3075}{360} = \frac{205}{24}$$

i = 2,55% = 0,0255
se usiamo la formula esponenziale possiamo fare tranquillamente riferimento alla formula

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}$$

1. Utilizzo la calcolatrice
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   $1156,25:(1+0,0255)^{(205/24)}$
   ottengo **932,487337385**
   che approssimo a **932,49 €**
   il capitale e' di **932,49 €**
2.

Una divisione fra numeri con molte cifre e' piuttosto laboriosa, ma abbiamo visto nel primo esercizio che trasformando tutto in logaritmo l'approssimazione e' troppo elevata; quindi al solito trasformiamo in logaritmo solamente l'espressione $(1,0255)^{205/24}$, calcoliamola poi eseguiamo la divisione con la calcolatrice

---

$\text{Log}(1,0255)^{205/24} = 205/24 \text{ Log } 1,0255 =$
la caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0
Cerco la mantissa
Leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
La mantissa del mio logaritmo e' 0109357
$205/24 \text{ Log } 1,0255 = 205/24 \cdot 0,0109357 = 0,093409104$
Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,093409104
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
In questo caso, visto il valore della mantissa, devo cercare nelle tavole a 5 decimali la mia mantissa a 5 decimali (09340,9104) e' compreso fra i numeri:

093342 → 1240
35
09377 → 1241

Di fianco ai due risultati trovi il numero **35** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
09340,9104-093342 = 7,9104

Nella tabella del 35 cerco 7,9104
Il numero minore piu' vicino e' 7,0 cui corrisponde la quinta cifra del nostro numero, cioe' 2
Mi resta 7,9104-7,0 = 0,9104; sposto di un posto la virgola e cerco la sesta cifra decimale
Nella tabella del 35 cerco 9,104;
Il numero minore piu' vicino e' ancora 7,0 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 2
Mi resta 9,104-7,0 = 2,104; sposto di un posto la virgola e cerco la settima ed ultima cifra decimale
Il numero piu' vicino a 21,04 nella tabella del 35 e' 21,0 cui corrisponde 6 quindi considero 7 come settima cifra decimale
Ottengo **1240226** quindi scrivo:
AntiLog AntiLog 0,093409104 = 1,240226
Ora eseguiamo la divisione
1156,25 : 1,240226 =932,28976009
approssimiamo a **€ 932,29**
Il capitale e' di **€ 932,29**

Esercizi sul calcolo del tasso nel regime ad interesse composto

TEMPO INTERO

– Esercizio n 1

Esercizio sul calcolo del tasso ad interesse composto per tempi interi

Ho impiegato un capitale di € 11500 per 5 anni ad interesse composto ed ho ricevuto un montante di € 12756,65;
calcolate quale tasso e' stato applicato
C = 11500 €
M_5 = 12756,65 €
t = 5

Dalla formula

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

debbo ricavare i

$$(1+i)^t = \frac{M_t}{C}$$

$$1+i = \sqrt[t]{\frac{M_t}{C}}$$

e quindi

$$i = \sqrt[t]{\left(\frac{M_t}{C}\right)} - 1$$

Per eseguire la radice di indice t, dovremo necessariamente usare la proprieta' dei logaritmi

$$\text{Log}\ \sqrt[t]{\left(\frac{M_t}{C}\right)} = \frac{1}{t}\ \text{Log}\ \frac{M_t}{C}$$

ed essendo il logaritmo di un quoziente dato dalla differenza dei logaritmi

$$\text{Log}\ \sqrt[t]{\left(\frac{M_t}{C}\right)} = \frac{1}{t}\ (\text{Log}\ M_t - \text{Log}\ C)$$

Calcolato tale valore come Logaritmo dovremo farne l'antilogaritmo e poi togliere 1 dal risultato ad avremo il valore del tasso

1. Utilizzo la calcolatrice
   Naturalmente utilizzando la calcolatrice non ho bisogno di utilizzare i Logaritmi, ma ricorda che a scuola puoi usare la calcolatrice solamente per le 4 operazioni e non per trovare subito il valore dell'espressione
   Imposto, sullo schermo il calcolo
   $(12756{,}65:11500)^{(1:5)}-1$
   ottengo **0,020957726** che approssimo a **0,021**
   Il tasso di interesse e' **i = 0,021** cioe' **i = 2,1%**
2.

Trasformiamo in logaritmo tutta il radicale e poi applichiamo le proprieta' dei logaritmi: in tal modo il radicale si trasforma in divisione e la divisione in differenza

---

$$\text{Log}\ \sqrt[t]{\left(\frac{M_t}{C}\right)} = \text{Log}\ \sqrt[5]{\left(\frac{12756{,}65}{11500}\right)} = \frac{1}{5}\ \text{Log}\ \frac{12756{,}65}{11500} = \frac{1}{5}\ (\text{Log}\ 12756{,}65 - \text{Log}\ 11500)$$

Calcolo il primo logaritmo sulle tavole logaritmiche.
Log 12756,65 = La caratteristica e' 4 essendo il mio numero compreso fra 10000 e 100000.
Per calcolare la mantissa cerco 1275,665; tale valore e' compreso fra 1275 e 1276
a **1275 → 10551.**
Stavolta, senza riportare tutta la tabella o fare l'interpolazione te lo calcolo in modo veloce.
Tra 1275 ed 1276 trovi il numero **34** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e':
1275,665-1275 = 0,665
Nella tabella del 34 dalla parte destra cerco i numeri 6 6 5 spostando per ogni cifra la virgola:

6 → 20,4
6 → 2,04
5 → 0,17

quindi

10551 +
20,4 +
2,04 +
0,17 =

10573,61

Quindi scrivo
Log 12756,65 = 4,1057361
Calcolo il secondo logaritmo **Log 11500,00 =** La caratteristica e' 4 essendo il mio numero compreso fra 10000 e 100000
Leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali **Log 115000 = 4,0606978**
Quindi
Log 12756,65 - Log 11500,00 = 4,1057361-4,0606978 = 0,0450383
Adesso divido per 5, ed ho
1/5 (Log 12756,65 - Log 11500,00) = 1/5·0,0450383 =0,00900766
Ho ottenuto

$$\text{Log}\ \sqrt[5]{\left(\frac{12756,65}{11500}\right)} = 0,00900766$$

Questo e' il logaritmo, ora trovo l'antilogaritmo (lo trasformo in valore normale)
AntiLog 0,00900766
Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
In questo caso, visto il valore della mantissa, posso cercare nelle tavole a 7 decimali (per i normali valori odierni dei tassi di interesse sara' sempre possibile)
la mia mantissa a 7 decimali (0090076,6) e' compreso fra i numeri (leggo le tavole cercando nelle mantisse a 7 decimali):

0089832	→	**10209**	
			426
0090257	→	**10210**	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **426** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
0090076,6 - 0089832 = 244,6
Nella tabella del 426 cerco 244,6;
un numero minore piu' vicino e' 213,0 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 5
Mi resta244,6-213,0 = 31,6; sposto di un posto la virgola e cerco la settima cifra
Nella tabella del 426 trovo, come numero piu' vicino a 316 trovo 298,2 che corrisponde alla cifra 7 e qui mi fermo
quindi scrivo
AntiLog 0138126,4 = 1,1020957
ed infine, togliendo 1,
i = 1,1020957 - 1 = 0,020957
ed approssimando **i = 0,021**

- *TEMPO NON INTERO*
  - Esercizio n 2
  - Esercizio n 3
  - Esercizio n 4

❖ Esercizi sul calcolo del tempo

2. Capitalizzazione frazionata

a) Cos'e' la capitalizzazione frazionata

Quando abbiamo la capitalizzazione di una somma, tale capitalizzazione puo' avvenire anche per periodi diversi dall'anno; ad esempio molto usata in ambito bancario e' la capitalizzazione semestrale: dopo sei mesi la banca calcola l'interesse maturato e lo riaggiunge al capitale e cosi' via di sei mesi in sei mesi.

Parleremo quindi di **capitalizzazione frazionata** quando il periodo di capitalizzazione e' una frazione di anno.

Logicamente, se avremo una capitalizzazione semestrale, dovremo considerare un tasso di interesse semestrale; se considereremo una capitalizzazione mensile, avremo un tasso di interesse mensile, eccetera.

b) Tasso nominale

Quando consideriamo un tasso frazionato, per comodita', senza dover ogni volta dire semestrale, trimestrale, eccetera si preferisce parlare di un tasso annuo che, suddiviso, ci dia il nostro tasso semestrale o trimestrale eccetera.

Ad esempio, diremo che abbiamo il tasso annuo nominale del 4% annuo convertibile semestralmente se consideriamo un tasso semestrale del 2%.
Altro esempio: un tasso annuo nominale del 6% convertibile 4 volte l'anno corrisponde ad un tasso trimestrale del' 1;5% (cioe' 6% annuo diviso in 4 trimestri).

Definizione:
Chiameremo **Tasso annuo nominale convertibile n volte l'anno** e lo indicheremo con j_k quel tasso finanziario che, diviso per k, ci fornisce il tasso di interesse per la frazione k-esima dell'anno.

Sorge pero' un problema: se io considero il tasso del 10% semestrale (per semplicita' usiamo dei tassi grossi) alla fine dell'anno non avro' un aumento di capitale del 20%, ma del 21% perche' a sei mesi il mio capitale e' cresciuto del 10% e nel secondo semestre l'interesse verra' calcolato anche su quel 10% in piu', fornendo quell' 1% di differenza. Quindi occorre distinguere subito:
Chiameremo **tasso annuo equivalente effettivo** il tasso i che, applicato ad un capitale per un anno, ci fornisca lo stesso montante del tasso annuo nominale convertibile n volte l'anno.

Ed infine chiameremo **tasso frazionato** il tasso i_k che useremo utilizzando come periodo di capitalizzazione una frazione di anno.

Ad esempio diremo che il **tasso annuo effettivo i del 21%** e' l'equivalente del **tasso annuo nominale convertibile semestralmente j_2 del 20%** e che il **tasso frazionato semestrale i_2 e' del 10%** (20:2=10)
In effetti il tasso si chiama **nominale** perche' non puoi usarlo cosi' com'e', ma solamente dividerlo per poter ottenere il tasso frazionato. Quando puoi usarlo subito, invece, lo diremo **effettivo**

c) Passaggio dal tasso frazionato al tasso annuo effettivo

Sorge quindi il problema di passare dal tasso annuo effettivo al tasso frazionato e, viceversa, dal tasso frazionato al tasso annuo effettivo.
Per il passaggio bastera' impostare che, capitalizzando un euro con il tasso annuo effettivo, si dovra' ottenere lo stesso risultato che, applicando ad un euro il tasso frazionato per un anno, supponendo di dividere l'anno in k periodi, chiamando i il tasso annuo effettivo ed i_k il tasso frazionato per la k-esima parte dell'anno, avremo:

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

Ora, passare dal tasso annuo nominale al tasso frazionato e' facile da fare perche' basta ricavare i spostando 1 dall'altra parte dell'uguale:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

Esempio: calcolare il tasso annuo effettivo equivalente ad un tasso trimestrale del 2%.
Abbiamo i dati:
$i=0,02$ $k = 4$
Applico la formula:
$i = (1+i_k)^k - 1 = (1+0,02)^4 - 1 =$
Leggo sulle tavole finanziarie per $(1+i)^n$ il valore:
$(1+0,02)^4=1,08243216$, quindi:
$= 1,08243216 - 1 = 0,08243216$
Quindi il tasso annuo effettivo corrispondente ad un tasso frazionato del 2% quadrimestrale e' di:
$i_k= 0,08243216$

d) Passaggio dal tasso annuo effettivo al tasso frazionato

Piu' complicato e' ricavare il tasso frazionato conoscendo il tasso annuo effettivo; partiamo dalla formula:
$(1+i) = (1+i_k)^k$
Per eliminare la potenza estraggo la radice k-esima a destra ed a sinistra dell'uguale:
$\sqrt[k]{(1+i)} = \sqrt[k]{(1+i_k)^k}$
Elimino tra loro l'esponente k ed il radicale:
$\sqrt[k]{(1+i)} = 1+i_k$
Leggo alla rovescia:
$1+i_k = \sqrt[k]{(1+i)}$ ed infine porto 1 dopo l'uguale ed ottengo:
$i_k = \sqrt[k]{(1+i)} - 1$
che si puo' anche scrivere (proprieta' degli esponenti frazionari)
$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$
Per calcolare questa formula (oltre, naturalmente, la calcolatrice che non potremmo usare) possiamo utilizzare i logaritmi, oppure anche le tavole finanziarie.

Esempio: calcolare il tasso quadrimestrale corrispondente ad un tasso annuo effettivo del 6%.
Dati: **$i = 0,06$** $k = 3$

Al solito eseguiamo l'esercizio prima con la calcolatrice (cosi' vediamo anche il risultato e sapremo se negli altri procedimenti commettiamo degli errori), poi con i logaritmi ed infine con le tavole

- Con la calcolatrice imposto sullo schermo:
  $(1+0,06)^{1/3} -1$
  ed ottengo:
  $i_4 = 0,019612822$
  approssimando, otteniamo l' 1,96% quadrimestrale.
- Con i Logaritmi
  $(1,06)^{1/3} - 1 =$
  calcolo prima l'espressione

$(1{,}06)^{1/3}$=
Trasformo in Logaritmo:
$\mathrm{Log}(1{,}06)^{1/3}$= 1/3 Log(1,06)= la caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0
cerco la mantissa;
cerco sulle tavole logaritmiche a 7 decimali 10600
la mantissa del mio logaritmo e' 0253059
1/3 Log(1,06)= 1/3 · 0,0253059 = 0,0084353
Cerco l'antilogaritmo:
Antilog 0,0084353 =
Essendo la caratteristica 0 , il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10; quindi avremo una cifra significativa prima della virgola.
In questo caso, visto il valore della mantissa, posso cercare nelle tavole a 7 decimali
la mia mantissa a 7 decimali (0084353) e' compresa fra i numeri:

0084298	→	10196	
			426
0084724	→	10197	

- Di fianco ai due risultati trovi il numero **426** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa, mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e':
  0084353-0084298 = 55
  Nella tabella del 426 cerco 55.
  Essendo un tasso e quindi non avendo bisogno di un'approssimazione elevatissima mi accontento di trovare il numero piu' vicino che e' 42 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 1
  Quindi ottengo:
  Antilog 0,0084353 = 1,01961
  e quindi:
  $(1{,}06)^{1/3}$= 1,01961
  Ora tolgo 1 ed ottengo:
  $(1{,}06)^{1/3}$ - 1 = 0,01961
  cioe' un tasso dell' 1,96 % quadrimestrale.
- Utilizzo le tavole finanziarie
  Cerco nella sezione **Tassi equivalenti** la tavola **valori di i_k dato i** e trovo, per il tasso annuo i=0,06
  i_3 = 1,9612825% = 0,019612825

e) Equivalenza fra due capitalizzazioni frazionate

Se abbiamo due capitalizzazioni frazionate con frazioni di anno diverse, e' possibile ricavare il tasso della prima conoscendo quello della seconda e viceversa.
La via piu' intuitiva sarebbe quella di passare dal primo tasso frazionato al tasso annuo nominale e da quello ricavare il secondo tasso frazionato, ma di solito, come calcoli, non e' una cosa breve.
E' pero' possibile ricavare una formula tipo quella del passaggio fra tasso frazionato e tasso annuo effettivo, applicando un ragionamento simile a quello gia' fatto nelle pagine precedenti.
Scriviamo l'uguaglianza dei montanti per il capitale di un euro impiegato per un anno sia con la prima che con la seconda capitalizzazione frazionata:
sia i_h il tasso della prima capitalizzazione frazionata
sia i_k il tasso della seconda capitalizzazione frazionata
avremo:
$(1+i_h)^h = (1+i_k)^k$
Voglio ricavare i_h quindi per eliminare la potenza estraggo la radice h-esima a destra ed a sinistra dell'uguale:
$\sqrt[h]{(1+i_h)^h} = \sqrt[h]{(1+i_k)^k}$
Elimino tra loro l'esponente h ed il radicale:

$1+i_h = \sqrt[h]{(1+i_k)^k}$
ed infine porto 1 dopo l'uguale ed ottengo:
$i_h = \sqrt[h]{(1+i_k)^k} - 1$
che si puo' anche scrivere (proprieta' degli esponenti frazionari)
$i_h = (1+i_k)^{k/h} - 1$
Per calcolare questa formula (oltre, naturalmente, la calcolatrice che non potremmo usare) possiamo utilizzare i logaritmi.

Esempio: calcolare il tasso quadrimestrale corrispondente ad un tasso frazionato trimestrale dell'1%.
Dati: $i_4 = 0,01$; trovare i_3.

Al solito eseguiamo l'esercizio prima con la calcolatrice (cosi' vediamo anche il risultato e sapremo se negli altri procedimenti commettiamo degli errori), poi con i logaritmi ed infine con le tavole

- Con la calcolatrice, imposto sullo schermo:
  $(1+0,01)^{4/3} -1$
  ed ottengo
  $i_3 = 0,013355506$
  approssimando otteniamo l' 1,34% quadrimestrale.
- Con i Logaritmi
  $(1,01)^{4/3} - 1 =$
  calcolo prima l'espressione
  $(1,01)^{4/3}=$
  Trasformo in Logaritmo
  $\mathrm{Log}(1,01)^{4/3}= 4/3\ \mathrm{Log}(1,01)=$ la caratteristica, essendo il mio numero compreso fra 1 e 10, vale 0
  cerco la mantissa;
  cerco sulle tavole logaritmiche a 7 decimali 10100
  la mantissa del mio logaritmo e' 0043214
  $4/3\ \mathrm{Log}(1,01)= 4/3 \cdot 0,0043214 = 0,005761867$
  Cerco l'antilogaritmo
  Antilog 0,005761867 =
  Essendo la caratteristica 0 il valore dell'antilogaritmo sara' compreso fra 1 e 10, quindi avremo una cifra significativa prima della virgola
  Cerco nelle tavole a 7 decimali
  la mia mantissa a 7 decimali (0057618,67) e' compresa fra i numeri:

0057380	→	10133	
			429
0057809	→	10134	

- Di fianco ai due risultati trovi il numero **429** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
  0057618,67-0057380 = 238,67
  Nella tabella del 429 cerco 238,67
  Essendo un tasso e quindi non avendo bisogno di un'approssimazione elevatissima mi accontento di trovare il numero piu' vicino che e' 257,4 cui corrisponde la sesta cifra del nostro numero, cioe' 6
  Quindi ottengo
  Antilog 0,005761867 = 1,01336
  e quindi
  $(1,01)^{4/3}= 1,01336$
  ora tolgo 1 ed ottengo
  $(1,01)^{4/3} - 1 = 0,01336$
  cioe' un tasso dell' 1,34 % quadrimestrale.

3. Sconto

a) Definizione di sconto

Chiameremo **sconto** il compenso che spetta a chi anticipa un pagamento: questo puo' avvenire:

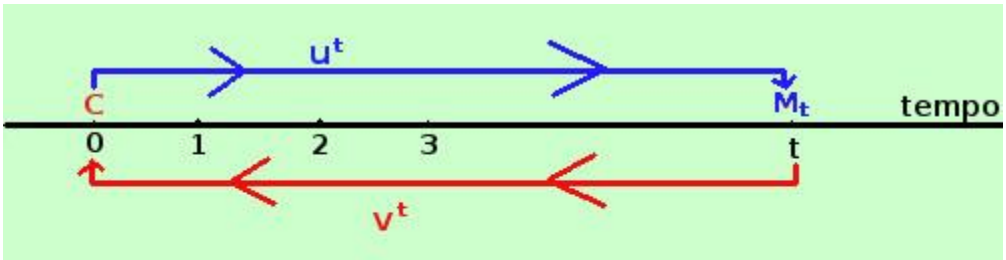
- Se il debitore e' disposto ad anticipare il pagamento del suo debito (riscattare)
- Se una terza persona (ad esempio una banca) anticipa al creditore l'importo che poi si fara' rimborsare dal debitore alla scadenza. Si dice che il credito viene ceduto dal debitore ad un terzo.

Chiunque paghi il debito prima della scadenza vuole un compenso chiamato sconto, sconto si chiama anche l'operazione di cessione del credito si dice pure che il credito viene scontato
Chiameremo **valore nominale** il valore del credito **somma scontata** il valore nominale diminuito dello sconto.
In pratica la somma scontata e' il prezzo di riscatto (vendita) del credito e siccome la somma scontata si riceve subito allora si chiamera' anche **valore attuale.**

Esempio:
Devo pagare fra 2 anni un importo di 10000 euro
Riscatto ora il mio debito con 9500 euro
10000 € valore nominale
9500 € somma scontata o valore attuale del credito
10000 € - 9500 € = 500 € sconto

b) Retta dei tempi

Come abbiamo gia' accennato si puo' intendere la capitalizzazione e lo sconto come lo spostamento di un capitale nel tempo.
Mentre la capitalizzazione proietta il capitale nel futuro facendolo diventare il montante, cosi' lo sconto fara' retrocedere nel tempo un capitale fino a farlo diventare un valore attuale.



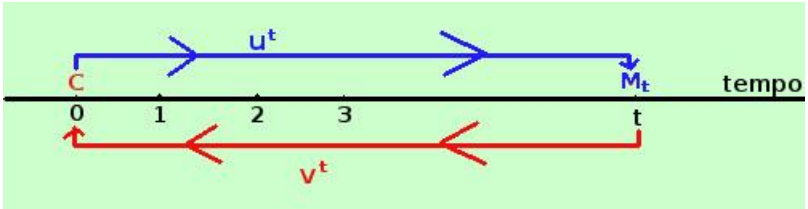
Come abbiamo chiamato **(fattore di montante)** $\mathbf{u^t}$ il termine che ci permetteva di calcolare il montante di un dato capitale, cioe' di spostare in avanti nel tempo un dato capitale Cosi' chiameremo **(fattore di sconto)** $\mathbf{v^t}$ il termine che ci permettera' di spostare una somma indietro nel tempo fino a farla diventare il valore attuale.

$$\mathbf{u^t = (1+i)^t} \qquad\qquad \mathbf{v^t = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}}$$

c) Regimi di sconto

Per stabilire il compenso per chi anticipa un pagamento (sconto) intanto bisogna stabilire un tasso (che chiameremo tasso di sconto).
Inoltre, sono possibili vari metodi per calcolare lo sconto.
Per capire bene questi metodi pensiamo allo sconto come ad un prestito: se io pago oggi la somma scontata e' come se facessi un prestito tale che dopo il periodo di utilizzo mi restituisca il capitale da pagare.
Posso cioe' paragonare la somma scontata ad un capitale che impiegato un certo tempo, fino alla scadenza, mi restituisca come montante il valore nominale
Quindi lo sconto corrisponde all'interesse su tale prestito

Se guardi la retta dei tempi il concetto ti sara' ancora piu' chiaro pensando a **C** come alla somma scontata ed a M_t come al valore nominale



Quindi avremo subito:

- Se penso alla somma scontata come ad un prestito fatto ad interesse semplice avremo il regime dello **sconto razionale**, utilizzato di solito per operazioni a breve scadenza

- Se penso alla somma scontata come ad un prestito fatto ad interesse composto avremo il regime dello **sconto composto**, utilizzato di solito per operazioni a lunga scadenza

- Molto usato poi e' lo **sconto commerciale**, per la sua semplicita': lo sconto e' direttamente proporzionale al valore nominale, al tasso ed al tempo. Lo considereremo nella prossima pagina

d) Sconto commerciale

Lo sconto commerciale e' un tipo di sconto direttamente proporzionale al valore nominale **C**, al tasso **i** ed al tempo di anticipazione del pagamento **t**.

$$S = Cit$$

Per trovare l'importo della somma scontata (o valore attuale) **V** basterà togliere dal valore nominale l'importo dello sconto:

$$V = C - S = C - Cit = C(1-it)$$

Si puo' dire che per trovare la somma scontata **V** si moltiplica il valore nominale **C** per il fattore di sconto commerciale **(1-it)**

Pensando al tempo come percorribile nei due sensi lo sconto e' l'interesse semplice che torna indietro nel tempo: mentre l'interesse scorre in avanti nel tempo e ti aumenta il capitale, lo sconto scorre all'indietro e te lo diminuisce

---

Nei problemi, per trovare la somma scontata **V** conviene prima trovare lo sconto **S** e poi eseguire la sottrazione dal valore nominale **C**

V= C - S

Esempio: Calcolare lo sconto commerciale per un valore nominale di 20000 € pagati 2 anni prima della scadenza al tasso del 5%
C = 20000 €
i = 0,05
t = 2 applico la formula per trovare lo sconto
S = Cit = 20000 €·0,05 · 2 = 2000 €
lo sconto e' 2000 €, quindi calcolo la somma scontata
V = C - S = 20000 € - 2000 € = 18000 €
La somma scontata e' 18000 €

e) Sconto razionale

Lo sconto si dice razionale quando e' calcolato ad interesse semplice, cioe' quando per ottenere il valore nominale si applica l'interesse semplice alla somma scontata .
Quindi chiamando **V** la somma scontata ed **S** lo sconto avremo:
S = Vit
In questa formula pero' non conosciamo due termini e precisamente S e V, quindi dovremo ricavare uno dei due termini per sostituirlo nella formula.
Sappiamo che il valore nominale **C** sara' il montante del valore attuale V in un regime ad interesse semplice, quindi avremo:
C = V(1+it)
Ora da questa formula ricaviamo V e poi sostituiamolo nella formula iniziale:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{C}}{(\mathbf{1} + \mathbf{it})}$$

Questa formula e' molto importante: essa ti mostra che per portare indietro nel tempo il capitale C e farlo diventare il valore attuale V, nel regime ad interesse semplice, basta dividerlo per il fattore (1+it) od anche moltiplicarlo per $1/(1+it) = (1+it)^{-1}$
$(1+it)^{-1}$ si chiama **fattore di sconto razionale**

---

e quindi sostituendo a V trovo la formula per lo sconto razionale:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Cit}}{(\mathbf{1} + \mathbf{it})}$$

Esempio: Calcolare lo sconto razionale per un valore nominale di 20000 € pagati 2 anni prima della scadenza al tasso del 5%
C = 20000 €
i = 0,05
t = 2
applico la formula per trovare lo sconto:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Cit}}{(\mathbf{1+it})} = \frac{\mathbf{20000 \cdot 0,05 \cdot 2}}{(\mathbf{1+0,05 \cdot 2})} = \mathbf{1818,181818182}$$

approssimando al centesimo lo sconto e' 1818,18 €, quindi calcolo la somma scontata
V = C - S = 20000 € - 1818,18 € = 18181,82 €
La somma scontata (o valore attuale) e' 18181,82 €

f) Sconto composto

Lo sconto si dice composto quando e' calcolato ad interesse composto cioe' quando per ottenere il valore nominale si applica l'interesse composto alla somma scontata
Quindi chiamando **V** la somma scontata e **C** il valore nominale avremo

$C = V(1+i)^t$

Ricaviamo il valore attuale V:

$$\mathbf{V = \frac{C}{(1+i)^t}}$$

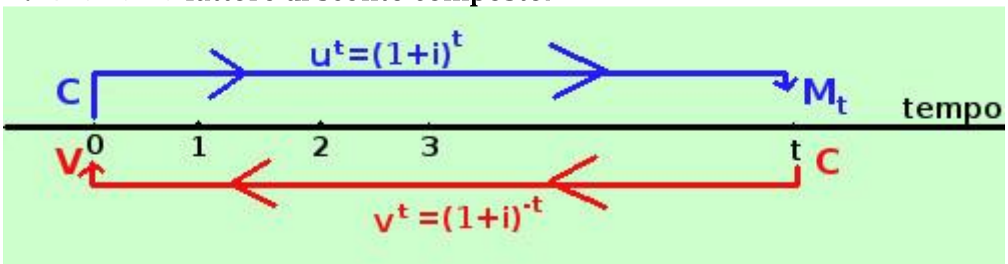
Pongo:

$$\mathbf{\frac{1}{1+i^t} = 1 + t^{-t} = v^t}$$

e quindi ottengo la formul:

$$\boxed{\mathbf{V = C\ v^t}}$$

Questa formula e' molto importante: essa ti mostra che per portare indietro nel tempo il capitale C e farlo diventare il valore attuale V, nel regime ad interesse semplice, basta dividerlo per il fattore (1+it) od anche moltiplicarlo per $1/(1+it) = (1+it)^{-1}$
$(1+it)^{-1} = v^t$ si chiama **fattore di sconto composto.**



Il fattore **v^t** ci permettera' di spostare indietro nel tempo i capitali a regime di interesse composto

---

Se ora voglio ricavare lo sconto bastera' sottrarre dal valore nominale il valore attuale**:**

$$\mathbf{S = C - V = C - C(1+i)^{-t} = C - Cv^t =}$$

e raccogliendo C ottengo la formula finale:

$$\boxed{\mathbf{S = C\ (1-v^t)}}$$

Negli esercizi per calcolare lo sconto conviene prima calcolare il valore attuale con la formula **$V = Cv^t$** e poi fare la differenza **S = C-V**
Per utilizzare la formula **$V = Cv^t$** si puo' ricorrere ai logaritmi: cioe' passando ai logaritmi avremo
$\text{Log } V = \text{Log } C + \text{Log } (1+i)^{-t} = \text{Log } C - t \text{ Log}(1+i) = \text{Log } C + t \text{ CoLog}(1+i)$
Per fare prima e' pero' preferibile leggere il valore di **v^t** nelle tavole finanziarie ed eseguire la moltiplicazione; vediamo un esempio con gli stessi dati delle pagine precedenti

---

Esempio: Calcolare lo sconto composto per un valore nominale di 20000 € pagati 2 anni prima della scadenza al tasso del 5%

C = 20000 €

i = 0,05

t = 2

Prima calcolo il valore attuale

$V = C\,(1+i)^{-t} = 20000€\,(1{,}05)^{-2}$

leggo sulle tavole il valore di $(1{,}05)^{-2}$

$20000€\,(1{,}05)^{-2} = 20000€ \cdot 0{,}90702948 = 18140{,}5896€$

Ora calcolo la sconto

$S = C - V = 20000€ - 18140{,}5896€ = 1859{,}4104€$

approssimando al centesimo lo sconto e'

S = 1859,41 €

Nota: quando fai un esercizio e devi approssimare sarebbe sempre bene approssimare solamente il risultato e non i dati parziali trovati nel corso dell'esercizio stesso: qui non abbiamo approssimato il valore attuale, ma lo sconto come risultato finale.

g) Valutazione di somme future

Il problema di trovare il capitale corrispondente al montante si puo' presentare anche quando dobbiamo valutare (magari per metterle a bilancio) il valore attuale di somme che dovremo riscuotere (o pagare) in futuro.

Parlando di somme che dovremo pagare parleremo di **pagamento di un debito**

Parlando invece di somme da riscuotere in futuro parleremo di **costituzione di un capitale**

Nel caso di costituzione di un capitale non si tratta del calcolo del montante, ma, al contrario, essendo noto il montante dovremo calcolare il capitale di partenza: in pratica corrisponde alla formula inversa del calcolo del montante: dobbiamo far scorrere il montante indietro nel tempo per trovare il capitale corrispondente.

Allora distinguiamo:

- per indicare il valore corrispondente al montante nel caso del pagamento di un debito parleremo di **somma scontata**
- Per indicare il valore corrispondente al montante nel caso della costituzione di un capitale parleremo di **valore attuale**

Esercizio:

Si vuole costituire un capitale di € 100000,00 (centomila); sapendo che il tasso e' i=2% e che il soggetto andra' in pensione fra 25 anni calcolare la quanto deve versare oggi per poter disporre della somma al momento della pensione

abbiamo

C = 100000,00 €

i = 0,02

t = 25

Applico la formula

$V = C\,v^t = C\,(1+i)^{-t} = 100000\text{ €} \cdot (1{,}02)^{-25} =$

leggo sulle tavole v^n il valore **$(1{,}02)^{-25} = 0{,}60953087$**

$= 100000\text{ €} \cdot 0{,}60953087 = 60953{,}087\text{ €}$

Approssimo a **C = 60953,09 €**

La somma da pagare per poter disporre di centomila euro fra 25 anni al tasso del 2% e' di euro 60953,09

Quindi il **valore attuale** di **€ 100000,00** al tasso del**2%** fra **25** anni e' di **€ 60953,09**

h) Utilizzo dei vari tipi di sconto

Abbiamo quindi tre tipi di sconto: commerciale, razionale e composto; pero' subito diciamo che per periodi superiori all'anno useremo esclusivamente lo sconto composto, mentre utilizzeremo gli sconti commerciale e razionale per periodi inferiori all'anno.

Se utilizziamo lo sconto commerciale per lunghi periodi e' possibile ottenere risultati assurdi: guarda cosa succede in questo esercizio
Calcola lo sconto commerciale al 5% per 1000 euro esigibili fra 30 anni
dati
C = 1000,00 €
i = 0,05
t = 30
Applico la formula per trovare lo sconto **S**
S = Cit = 1000,00 € · 0,05 · 30 = 1500,00 €
quindi applicando lo sconto commerciale lo sconto e' superiore al valore nominale e, assurdamente, per pagare 1000 euro dovrei ricevere 500 euro (1000,00-1500,00).
Questo non si verifica se considero tempi inferiori all'anno

Mentre lo sconto commerciale si calcola sul valore nominale, lo sconto razionale si calcola invece sul valore attuale (che e' minore) .
Quindi lo sconto commerciale S_c, a parita' di tasso sara' sempre superiore allo sconto razionale **Sr**.
Ne deriva che, a parita' di tasso, il valore attuale secondo lo sconto commerciale $V_c = C - S_c$ e' minore rispetto a quello calcolato con lo sconto razionale $V_r = C - S_r$.
Questo e' normale e gli istituti di credito utilizzeranno appunto tassi diversi per sconto commerciale e razionale (vedi poi la pagina sull'equivalenza fra tasso commerciale e razionale (fare link)).
Il favore dell'utilizzo dello sconto commerciale e' imputabile alla semplicita' dei calcoli da applicare

i) Tasso di interesse e tasso di sconto

A questo punto soffermiamoci un poco sul significato di **i** che finora abbiamo indicato genericamente come tasso sia per l'interesse che per lo sconto.
Sarebbe bene invece utilizzare **i** solamente come tasso di interesse perche' il calcolo che facciamo moltiplicando per i e' sempre sul sul valore attuale.
Se consideriamo il tasso i per un anno sul capitale di 1 euro lo sconto razionale sara' essendo C=1 e t=1:

$$\mathbf{S = \frac{Cit}{(1 + it)} = \frac{i}{1 + i}}$$

similmente se consideriamo lo sconto composto avremo, sempre per il capitale di 1 euro per un anno che lo sconto e':

$$\mathbf{S = C - V = c - \frac{C}{(1 + i^t} = 1 - \frac{1}{1 + i} = \frac{1 + i - 1}{1 + i} = \frac{i}{1 + i}}$$

quindi, siccome lo sconto per C=1 e t=1 e' il valore attuale di 1 euro riscuotibile fra un anno e deve corrispondere al tasso di sconto avremo che il tasso di sconto **d** (discount=sconto), sia per lo sconto razionale che per lo sconto composto, e':

$$\mathbf{d = \frac{i}{1+i}}$$

Fa eccezione lo sconto commerciale, in cui lo sconto viene calcolato sul valore nominale **C** invece che sul valore attuale: per questo in qualche testo invece di usare **i** nella formula dello sconto commerciale si preferisce indicarlo con **d** e noi seguiremo questo metodo.
E la formula dello sconto commerciale sara:'

$$\mathbf{S = C\ d\ t}$$

quindi d'ora in avanti parleremo di
Tasso di interesse i se il tasso sposta in avanti i capitali nel tempo
Tasso di sconto d se il tasso sposta indietro i capitali nel tempo, essendo
d = i nel caso dello sconto commerciale:

$$\mathbf{d = \frac{i}{1+i}}$$

nel caso dello sconto razionale o composto

j) Condizione di equivalenza fra sconto commerciale e razionale

A questo punto diventa automatico confrontare tra loro lo sconto commerciale e razionale rispetto ai rispettivi tassi.
Per trovare le condizioni per cui i due tassi di sconto sono equivalenti: bastera' uguagliare tra loro i due sconti per un credito **C** scadente al tempo **t** ponendo:
Cit sconto commerciale con tasso **i**

$\mathbf{\frac{Ci't}{1+i't}}$ sconto razionale con tasso $\mathbf{i'}$

avremo che deve valere:

$$\mathbf{Cit = \frac{Ci't}{1+i't}}$$

dividendo entrambe i membri per **Ct** ottengo:

$$\mathbf{i = \frac{i'}{1+i't}}$$

Questa e' la condizione di equivalenza fra tasso commerciale e tasso razionale: quando i tassi di interesse coinvolti sono in questa relazione allora abbiamo che i due sconti danno lo stesso risultato.
Partendo da questa formula troviamo pero' anche la formula inversa: l'equivalenza fra il tasso razionale e quello commerciale minimo comune multiplo ottengo:

$$\mathbf{\frac{i(1+i't)}{1+i't} = \frac{i'}{1+i't}}$$

tolgo i denominatori

$$i\,(1+i't) = i'$$

Eseguo la moltiplicazione e porto i' prima dell'uguale

$$i + ii't - i' = 0$$

lascio i termini con la **i'** prima dell'uguale

$$ii't - i' = -i$$

cambio segno e scrivo prima il termine positivo

$$i' - ii't = i$$

raccolgo la **i'**

$$i'(1 - it) = i$$

ricavo i ed ottengo:

$$\mathbf{i' = \frac{i}{1 - it}}$$

Quest'ultima e' la condizione di equivalenza fra tasso razionale e tasso commerciale ad un certo tasso e per un certo tempo: quando i tassi di interesse coinvolti sono in questa relazione allora abbiamo che i due sconti danno lo stesso risultato.
Da notare che l'equivalenza dipende oltre che dal tasso, anche dal tempo: variando il tempo varia anche il tasso equivalente.

Esercizio 1:
Dato lo sconto razionale del 4% trovare il tasso equivalente per lo sconto commerciale supponendo una scadenza di 3 mesi
dati
tasso razionale i' = 0,04
tempo t = 3 mesi = 3/12 = 1/4 = 0,25
applico la formula

$$i = \frac{i'}{1+i't} = \frac{0{,}04}{1+0.04\cdot 0{,}25t} = \frac{0{,}04}{1+0{,}01} = \frac{0{,}04}{1{,}01} = 0{,}0396$$

Il tasso comerciale equivalente e' del 3,96%

Esercizio 2:
Dato lo sconto commerciale del 4% trovare il tasso equivalente per lo sconto razionale supponendo una scadenza di 3 mes.i
Dati:
tasso commerciale i = 0,04
tempo t = 3 mesi = 3/12 = 1/4 = 0,25
Applico la formula:

$$\mathbf{i' = \frac{i}{1 - it} = \frac{0,04}{1 - 0,04 - 0,25t} = \frac{0.04}{1 - 0,01} = \frac{0,04}{0,99} = 0,0404}$$

Il tasso razionale equivalente e' del 4,04%

E' da osservare che, a parita' di tempo, il tasso di sconto commerciale e' inferiore al tasso razionale: infatti il primo si applica al valore del credito **C**, mentre il secondo si applica al valore attuale di **C** portandolo indietro nel tempo, cioe' si applica su **C/(1+it)** che e' sempre inferiore a **C**.

4. Trasferimento di capitali nel tempo

A questo punto riprendiamo l'argomento che avevamo gia brevemente accennato sullo spostamento di capitali per un numero **t** di anni.
Essendo il periodo superiore all'anno useremo quindi sempre la capitalizzazione composta e lo sconto composto:

- montante sulla retta dei tempi
- valore attuale sulla retta dei tempi
- proprieta' di ***u*** e ***v***
- scindibilita' delle operazioni

a) Montante sulla retta dei tempi

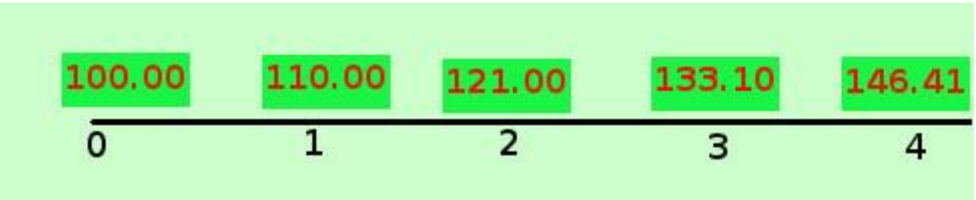
Partiamo da un esempio banale: consideriamo la somma di 100 euro al tasso del 10% per un certo numero di anni, ad esempio 4, vediamo da 0 a 4 anni cosa succede:

Anni	**Valore**
0	**100,00**
1	**110,00**
2	**121,00**
3	**133,10**
4	**146,41**

Ecco come eseguire i calcoli:
Per farlo velocemente con la calcolatrice basta che esegui la moltiplicazione del capitale di 100,00 euro per 1,10 per ogni anno: ottieni cosi' il montante

100.00 · 1,10 = 110,00 €
110.00 · 1,10 = 121,00 €
121.00 · 1,10 = 133,10 €
133.10 · 1,10 = 146,41 €

In pratica il capitale si trasforma, man mano che passa il tempo, assumendo un nuovo valore dipendete dal tasso di interesse



Ma quello che dobbiamo tenere ben presente e' che possiamo pensare il valore del capitale sempre equivalente a se' stesso, solo che il tempo scorre e quindi lo trasforma, ma il suo valore effettivo intrinseco non varia

---

E' come per l'inflazione: se ho un inflazione al 10% quello che compro ora con 100 euro il prossimo anno lo comprero' con 110 euro, fra due anni con 121 euro eccetera....quindi 100 euro di oggi sono equivalenti a 121 euro fra due anni (e quindi sempre al tasso del 10% per noi sara' indifferente parlare di 100 euro ora oppure di 121 euro fra due anni)

Quindi, per quanto visto sopra, considerando la formula del montante per un certo numero **n** di anni:

$$M_n = C(1+i)^n$$

possiamo pensare che il fattore $(1+i)^n$ sposti in avanti il capitale nel tempo, mantenedolo equivalente a se' stesso.

Visto l'importanza dell'argomento, attribuiamo un simbolo speciale a tale fattore

$$(1+i)^n = u^n$$

Quindi u^n sara' il fattore che mi sposta in avanti il capitale nel tempo di n anni.

b) Valore attuale sulla retta dei tempi

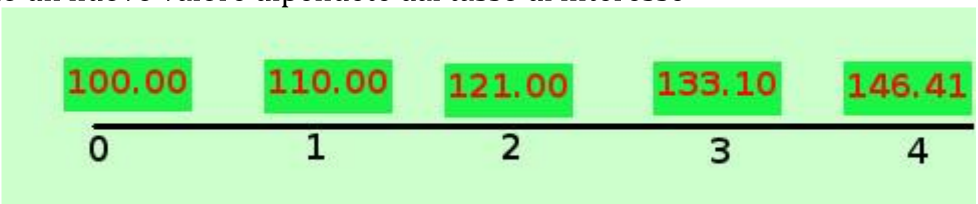
Lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per il montante possiamo fare anche per lo sconto.
Partiamo anche qui da un esempio banale: consideriamo la somma di 146,41 euro (ho preso la somma della pagina precedente) al tasso del 10% che devo pagare fra 4 anni, vadiamo da 0 a 4 anni cosa succede se pago prima.

Anni	Valore scontato
4	146,41
3	133,10
2	121,00
1	110,00
0	100,00

Ecco come eseguire i calcoli:
Per farlo velocemente con la calcolatrice basta che esegui la divisione del capitale di 146,41 euro per 1,10 per ogni anno: ottieni cosi' il valore attuale, anno per anno

146,41 : 1,10 = 133.10 €
133,10 : 1,10 = 121.00 €
121,00 : 1,10 = 110.00 €
110,00 : 1,10 = 100.00 €

In pratica il valore attuale si trasforma, man mano che indietreggiamo nel tempo, assumendo un nuovo valore dipendete dal tasso di interesse



Anche qui, quello che dobbiamo tenere ben presente e' che possiamo pensare il valore del capitale sempre equivalente a se' stesso, solo che il tempo scorre e quindi lo trasforma, ma il suo valore effettivo intrinseco non varia

---

Cioe' al tasso del 10% la somma di euro 146,41 fra 4 anni e' equivalente alla somma di euro 100,00 ora od anche al tasso del 10% quello che comprero' fra 4 anni con euro 146,41 adesso posso acquistarlo con euro 100

Quindi, per quanto visto sopra, considerando la formula del valore attuale per lo sconto composto per un certo numero **n** di anni:

$$V = \frac{C}{(1+i)^n}$$

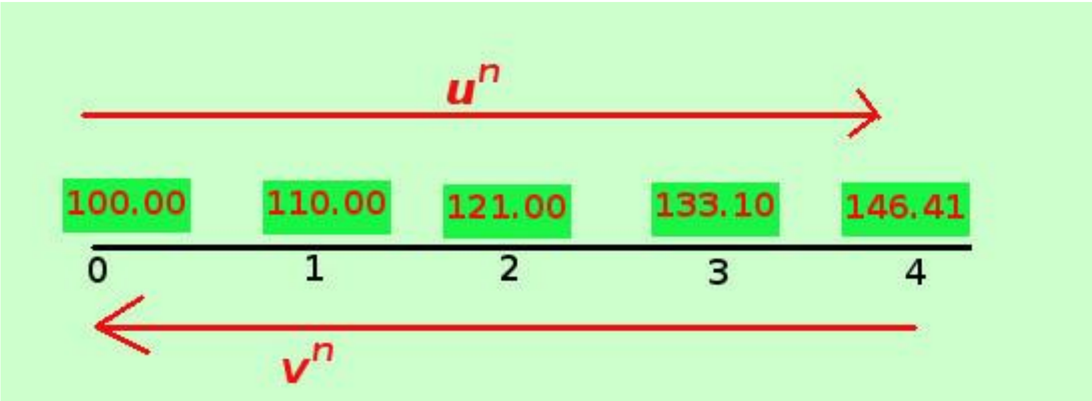
possiamo pensare che il fattore $1/(1+i)^n$ sposti indietro il capitale nel tempo, mantenendolo equivalente a se' stesso.
Visto l'importanza dell'argomento, attribuiamo un simbolo speciale a tale fattore:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \nu^n$$

Quindi v^n sara' il fattore che mi sposta indietro il capitale nel tempo di n anni.

c) Proprieta' di u e v

Se quindi consideriamo fisso il tasso **i** abbiamo che il fattore u^n sposta avanti i capitali di n anni nel tempo e che il fattore v^n sposta indietro i capitali di n anni nel tempo (mantenendoli equivalenti)



Qui ti consiglio, prima di procedere, di ripassare **le proprieta' delle potenze**

Siccome abbiamo che:

$$u = (1+i) \qquad\qquad V = \frac{1}{(1+i)}$$

abbiamo che u e v sono tra loro reciproci (Due termini si dicono fra loro reciproci se il loro prodotto vale 1. Esempio 3 e' il reciproco di 1/3 perche' $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$)

Avremo quindi le notevoli **proprieta'**

- il prodotto tra u e v vale sempre 1
  $u \cdot v = 1$
  Se sposto in avanti di un anno un capitale poi lo sposto indietro sempre di un anno ottengo sempre lo stesso capitale
- se u e v hanno lo stesso eponente allora il loro prodotto vale sempre 1
  $u^n \cdot v^n = 1$
  Se sposto in avanti di n anni un capitale poi lo sposto indietro sempre di n anni ottengo sempre lo stesso capitale
- se l'esponente e' negativo allora posso scambiare u e v mettendo l'esponente positivo
  $u^{-n} = v^n$ e $v^{-n} = u^n$
  Deriva dal fatto che se trasformo l'esponente da positivo a negativo il termine passa dal numeratore al denominatore e viceversa

Spostare in avanti di -n anni un capitale equivale a spostarlo indietro di n anni
Spostare indietro di -n anni un capitale equivale a spostarlo in avanti di n anni

- Dalla precedente deriva che dividere per una potenza di u equivale a moltiplicare per una potenza di v e viceversa; infatti:

$$\frac{C}{u^n} = \frac{C}{v^{-n}} = C \cdot v^n \qquad \frac{C}{v^n} = \frac{C}{u^{-n}} = C \cdot u^n$$

- Il prodotto di due potenze di u e v e' ancora uguale ad una potenza di u e v che ha come esponente la differenza degli esponenti

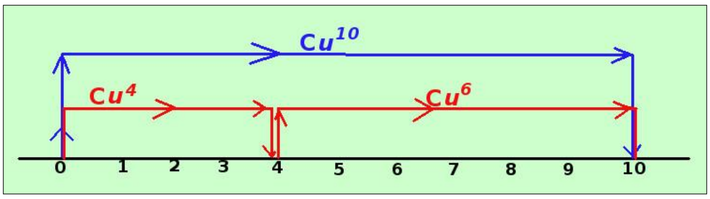
$u^s \cdot v^t = u^{s-t} = v^{t-s}$

Ad esempio $u^7 \cdot v^5 = u^2$ perche' mi sposto in avanti di 7 anni poi mi sposto indietro di 5, il che equivale a spostarsi avanti di 2 anni.

Potevamo anche scrivere v^{-2} ma di solito si preferisce considerare l'esponente risultante positivo.

d) Scindibilita' delle operazioni

Da quanto visto nelle pagine precedenti avremo che: se considero sull'asse dei tempi due diverse scadenze, ad esempio 4 anni e 10 anni

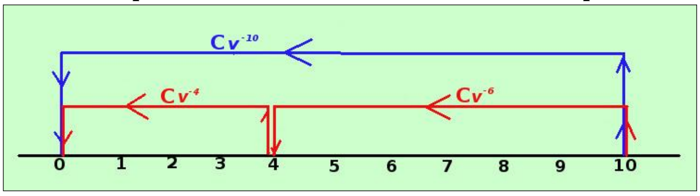


un capitale al valore attuale di C diventera' fra 4 anni C u^4 e fra 10 anni C u^{10}
Per ottenere C u^{10} posso semplicemente pensare il capitale impiegato prima per 4 anni poi per 6 anni, cioe'
C u^{10} = C $u^4 \cdot u^6$.
Infatti C u^4 e' il montante dopo 4 anni ed e' il capitale su cui calcolo il montante per i residui 6 anni C $u^4 \cdot u^6$ e questo equivale a calcolare il montante del valore attuale C per 10 anni

---

La formula deriva dalla proprieta' del prodotto di potenze con la stessa base
C $u^4 \cdot u^6$ = C u^{4+6} = C u^{10}

Come abbiamo fatto per un montante potremo fare lo stesso per uno sconto.
Se considero sull'asse dei tempi due diverse scadenze, ad esempio 4 anni e 10 anni



un capitale di valore C fra 10 anni diventera' fra 4 anni C $v^{(10-4)}$ = C v^6 ed ora i C v^{10}
Per ottenere C v^{10} posso semplicemente pensare il capitale spostato indietro nel tempo prima per 6 anni poi per 4 anni, cioe' :
C v^{10} = C $v^6 \cdot v^4$

Infatti **C** v^6 e' il valore attuale 6 anni prima della scadenza ed e' il capitale su cui calcolo il valore attuale per i residui 4 anni **C** $v^6 \cdot v^4$ e questo equivale a calcolare il valore attuale di **C** per 10 anni.

5. Problemi piu' comuni

Da quanto visto nelle pagine precedenti possiamo pensare il capitale come sempre equivalente a se' stesso ad un certo tasso ed al variare del tempo, cosa che mi porta a considerare equivalenti capitali con tempi diversi e che mi permettera' di mettere assieme operazioni finanziarie sia di montante che di sconto, unificando il valore globale di tali operazioni e fornendomi quindi un quadro esatto della situazione finanziaria del soggetto cui tali operazioni sono riferite

---

Quindi potremo sempre considerare piu' operazioni a tempi diversi oppure un'unica applicazione a tempo totale, cosa che ci permettera' in ogni momento di poter controllare la situazione patrimoniale di una societa', azienda, eccetera... spostando in quel dato momento tutti i crediti ed i debiti esistenti

---

- unificazione di piu' crediti
- sostituzione di piu' pagamenti
- calcolo del tasso medio per piu' impieghi

a) Riduzione di piu' crediti

Se una persona ha diversi crediti con varie scadenze puo' realizzare i diversi crediti con un'unica riscossione (ad esempio accordandosi con i creditori oppure cedendo i vari crediti ad una banca o societa' finanziaria).
Quindi fra le parti bisogna accordarsi, considerando il regime ad interesse e sonto composto, sul tasso da applicare.
Da notare che i crediti di cui parliamo non influiscono con il loro tasso: Se il credito deriva da una vendita con pagamento differito allora il tasso proprio non esiste , e se si tratta del recupero di un prestito noi lavoriamo sul montante e quindi il tasso, essendo gia' compreso, e' per noi indifferente.
Invece le parti contraenti dovranno accordarsi sul tasso da applicare per spostare i capitali nel tempo; cio' da' luogo a due soluzioni:

- i contraenti fissano la data dell'unico pagamento, quindi ne determineremo l'importo; diremo che abbiamo la **riduzione di piu' crediti ad una scadenza data**
- i contraenti fissano l'importo dell'unico pagamento, quindi ne determineremo la scadenza; quindi dovremo **determinare la scadenza**

- importo a scadenza data
- ricerca della scadenza

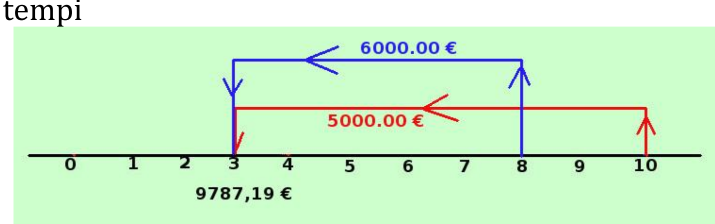
1. Riduzione di più crediti ad una scadenza data

Dobbiamo determinare l'importo dell'unico pagamento: a seconda della data della scadenza fissata avremo, per eseguire i calcoli queste 4 possibilita':

a. Riduzione di più crediti ad una scadenza anteriore

In questo caso anticipo il pagamento pagando un unico importo Dobbiamo determinare l'importo: vediamo come procedere su un esempio. Devo pagare allo stesso creditore le somme di 5000 € fra 10 anni e 6000 € fra 8 anni Mi accordo con il creditore per estinguere i debiti con un unico versamento fra 3 anni Quanto dovro' pagare conteggiando sconti composti al 2%?
Dati:
debito1 = 5000 tempo1= 10 anni
debito2 = 6000 tempo2= 8 anni
tasso di sconto = 2% = 0,02 tempo3 = 3 anni
Trovare il valore a 3 anni, chiamiamolo **V_3**

Traccio la retta dei tempi



devo riportare indietro nel tempo la somma di 5000,00 € per 7 anni e la somma di 6000,00 € per 5 anni al tasso i=0,02, quindi
$V_3 = 5000{,}00 \cdot v^7 + 6000{,}00 \cdot v^5 = 5000{,}00 \cdot 1{,}02^{-7} + 6000{,}00 \cdot 1{,}02^{-5} =$
Leggo sulle tavole finanziarie i valori per **v^n**
$1.02^{-7} = 0{,}87056018$
$1.02^{-5} = 0{,}90573081$
$= 5000{,}00 \cdot 0{,}87056018 + 6000{,}00 \cdot 0{,}90573081 = 9787{,}18576$
approssimo a **9787,19 €**
Quindi fra 5 anni estinguero' il debito pagando € 9787,19

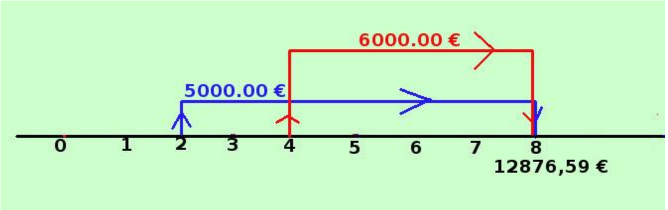
Ho eseguito l'esercizio con due debiti, avrei potuto farlo con 3,4,....
bastera' sommare piu' termini

Nota:
Potrei inoltre riportare il debito
all'epoca 0 moltiplicando tutti i termini della somma per v^3 oppure solo il risultato
all'epoca 1 moltiplicando tutti i termini della somma per v^2 oppure solo il risultato
all'epoca 2 moltiplicando tutti i termini della somma per v oppure solo il risultato

all'epoca 4 moltiplicando tutti i termini della somma per u oppure solo il risultato
all'epoca 5 moltiplicando tutti i termini della somma per u^2 oppure solo il risultato
all'epoca 6 moltiplicando tutti i termini della somma per u^3 oppure solo il risultato
....
in questo modo posso sapere quanto dovrei pagare ad ogni possibile scadenza e scegliere il pagamento per me piu' convenienbte dal punto di vista della mia disponibilita' finanziaria, oppure, riportando tutto all'epoca 0 posso valutare la mia situazione finanziaria attuale

b. Riduzione di più crediti ad una scadenza posteriore

In questo caso ci riferiamo ad una scadenza successiva alle varie scadenze delle somme considerate.
Dobbiamo determinare l'importo: vediamo come procedere su un esempio.
Devo pagare allo stesso creditore una somma di 5000 € fra 2 anni e 6000 € fra 4 anni Mi accordo con il creditore per un unico pagamento fra 8 anni al tasso del 3,25% Quanto dovro' pagare fra 8 anni?
Dati:
debito1 = 5000   tempo1= 2 anni
credito2 = 6000   tempo2= 4 anni
tasso di sconto = 3,25% = 0,0325   tempo3 = 8 anni
Trovare il valore a 8 anni, chiamiamolo V_8
Traccio la retta dei tempi:

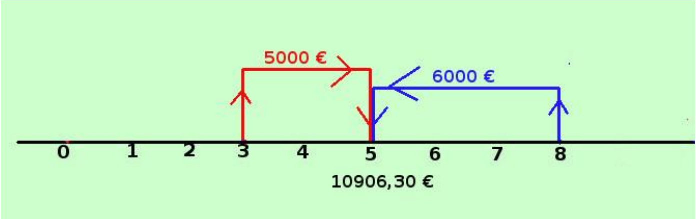


devo portare avanti nel tempo sia la somma di 5000,00 € per 6 anni che la somma di 6000,00 € per 4 anni al tasso i=0,0325, quindi
$V_8 = 5000{,}00 \cdot u^6 + 6000{,}00 \cdot u^4 = 5000{,}00 \cdot 1{,}0325^6 + 6000{,}00 \cdot 1{,}0325^4 =$
Leggo sulle tavole finanziarie i valori per u^n
$1.0325^6 = 1{,}21154727$
$1.0325^4 = 1{,}13647593$
$= 5000{,}00 \cdot 1{,}21154727 + 6000{,}00 \cdot 1{,}13647593 = 12876{,}59193$
approssimo a **12876,59 €**
Quindi dovro' pagare fra 8 anni l'importo di € 12876,59

Ho eseguito l'esercizio con due crediti, avrei potuto farlo con crediti e debiti assieme ed anche con 3,4,... crediti/debiti
bastera' semplicemente sommare piu' termini

c. Riduzione di più crediti ad una scadenza intermedia

In questo caso ci riferiamo ad una scadenza compresa fra le varie scadenze delle somme considerate.
Dobbiamo determinare l'importo: vediamo come procedere su un esempio.
Devo ricevere da due debitori le somme di 5000 € fra 3 anni e 6000 € fra 8 anni Mi accordo con una banca per cederle i crediti concordando di ricevere una somma fra 5 anni al tasso del 1,25%.
Quanto ricevero' dalla banca fra 5 anni?.
Dati:
credito1 = 5000   tempo1= 3 anni
credito2 = 6000   tempo2= 8 anni
tasso di sconto = 1,25% = 0,0125   tempo3 = 5 anni
Trovare il valore a 5 anni, chiamiamolo V_5.
Traccio la retta dei tempi:



devo portare avanti nel tempo la somma di 5000,00 € per 2 anni e portare indietro nel tempo la somma di 6000,00 € per 3 anni al tasso i=0,0125, quindi

$V_3 = 5000{,}00 \cdot u^2 + 6000{,}00 \cdot v^3 = 5000{,}00 \cdot 1{,}0125^2 + 6000{,}00 \cdot 1{,}0125^{-3} =$

Leggo sulle tavole finanziarie i valori per u^n e v^n

$1.0125^2 = 1{,}02515625$

$1.0125^{-3} = 0{,}96341833$

$= 5000{,}00 \cdot 1{,}02515625 + 6000{,}00 \cdot 0{,}96341833 = 10906{,}29123$

approssimo a **10906,30 €**

Quindi la banca in cambio dei miei crediti mi paghera' fra 5 anni l'importo di € 10906,30

Ho eseguito l'esercizio con due crediti, avrei potuto farlo con crediti e debiti assieme ed anche con 3,4,... crediti/debiti.
Bastera' semplicemente sommare piu' termini.

d. Conclusioni

2. Ricerca della scadenza

Quando abbiamo piu' debiti (o crediti) e' possibile, fissando un tasso e concordando la cifra da pagare, trovare la data detta **scadenza comune** in cui tale somma deve essere pagata per estinguere i debiti (crediti). E' possibile anche trovare una scadenza che mi permetta di estinguere i vari debiti senza considerare un tasso: questa sara' chiamata **scadenza media**

a. Scadenza comune

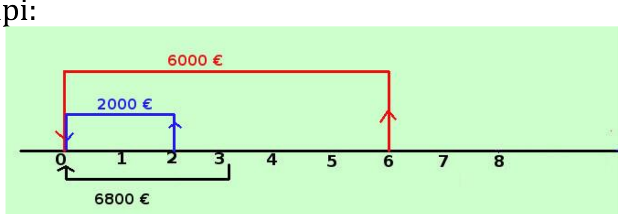
Troviamo la data **scadenza comune** in cui devo pagare una somma fissata per estinguere piu' debiti.
Vediamo il metodo su un esercizio:
Devo pagare le somme di 2000 € fra 2 anni e 5000 € fra 6 anni. Mi accordo con il creditore per estinguere il debito con un pagamento di € 6800 al tasso dell' 1,75%. In che data dovro' versare i 6800 €?
Dati:

debito1 = 2000 tempo1= 2 anni

debito2 = 5000 tempo2= 6 anni

tasso di sconto = 1,75% = 0,0175 saldo 6800 €

Troviamo la data del pagamento **t_x**.
In questi casi conviene riportare tutti i dati alla data odierna ed impostare l'equazione
Traccio la retta dei tempi:



Imposto l'equazione: $6800 \cdot 1{,}0175^{-t_x} = 2000 \cdot 1{,}0175^{-2} + 5000 \cdot 1{,}0175^{-6}$
divido tutto per 100
$68 \cdot 1.0175^{t_x} = 20 \cdot 1{,}0175^{-2} + 50 \cdot 1{,}0175^{-6}$

$$1.0175_x^{-t} \frac{20 \cdot 1{,}0175^{-2} + 50 \cdot 1{,}075^{-6}}{68} =$$

leggo sulle tavole e sostituisco:

$$= \frac{20 \cdot 0{,}96589777 + 50 \cdot 0{,}90114254}{68} = 0{,}946692388$$

Per calcolare t_x passo ai logaritmi:

$\mathrm{Log}\ 1.0175^{-t_x} = \mathrm{Log}\ 0{,}946692388$

$-t_x\ \mathrm{Log}\ 1.0175 = \mathrm{Log}\ 0{,}946692388$

$t_x\ \mathrm{CoLog}\ 1.0175 = \mathrm{Log}\ 0{,}946692388$

$$t_x = \frac{\mathrm{Log}\ 0{,}946692388}{\mathrm{CoLog}\ 1.0175}$$

calcolo il logaritmo al numeratore:
Log 0,946692388 =

La caratteristica e' $\bar{1}$ essendo il mio numero compreso fra 0 ed 1:
Per calcolare la mantissa cerco 946692388; tale valore e' compreso fra 9466 e 9467

9466	→	97617	
			4
9467	→	97621	

Di fianco ai due risultati trovi il numero **4** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
9466,924-9466 = 0,924 (approssimo alla terza cifra decimale)
Nella tabella del 4 cerco i numeri 9 2 4 spostando per ogni risultato la virgola
9611,6878

9 → 3,6
2 → 0,08
4 → 0,016

quindi

$$\begin{array}{r} 97617 \quad + \\ 3{,}6 \quad + \\ 0{,}08 \quad + \\ 0{,}016 = \\ \hline 97620{,}696 \end{array}$$

quindi scrivo
Log 0,946692388 = $\bar{1}$,97620696

Calcolo il Cologaritmo al denominatore
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
CoLog 1,0175 = - Log 1,0175 =

Essendo
Log 1,0175 = 0,0075344
avro'
CoLog 1,0175 = - Log 1,0175 = -(0,0075344) = $\mathbf{\overline{1},9924656}$
Nel calcolo preferisco utilizzare quello con il meno davanti.
Ora posso fare la divisione e trovare $\mathbf{t_x}$:

$$t^x = \frac{\mathbf{Log\ 0,946692388}}{\mathbf{CoLog\ 1.0175}} = \frac{\mathbf{\overline{1},97620696}}{\mathbf{-(0,0075344)}} = \frac{\mathbf{-1+0,97620696}}{\mathbf{-0,0075344}} =$$

$$= \frac{\mathbf{-0,0237904}}{\mathbf{-0,0075344}} = \frac{\mathbf{0,0237904}}{\mathbf{0,0075344}} = \mathbf{3,157570609}$$

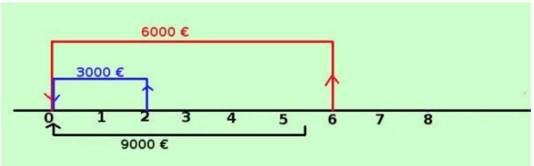
Sono 3 anni e 158 (approssimato) millesimi di anno: per vedere a quanti giorni corrispondono i decimali faccio la proporzione (uso l'anno commerciale di 360 giorni):
158:1000 = x : 360
risolvo la proporzione:

$$x = \frac{\mathbf{360 \cdot 158}}{\mathbf{1000}} = 20,88$$

che approssimiamo a 21 giorni.
Quindi dovro' eseguire il pagamento di 6800 euro fra 3 anni e 21.

b. Scadenza media

Troviamo ora la data **scadenza media** in cui devo pagare il totale delle somme dei debiti ad un tasso fisso: in tal caso la scadenza sara' sempre intermedia fra le varie scadenze considerate, da cui il nome.
Vediamo il metodo su un esercizio:
Devo pagare le somme di 3000 € fra 2 anni e 6000 € fra 6 anni. Mi accordo con il creditore per estinguere il debito con un pagamento di € 9000; tasso fisso i= 2% .
In che data dovro' versare i 9000 €?
Dati:
debito1 = 3000 tempo1= 2 anni
debito2 = 6000 tempo2= 6 anni
saldo 9000 € i= 2% = 0,02
Troviamo la data del versamento del saldo $\mathbf{t_x}$
Conviene riportare tutti i dati alla data odierna ed impostare l'equazione.
Traccio la retta dei tempi:



Imposto l'equazione:
$\mathbf{9000 \cdot v^{-t_x} = 3000\cdot}$
$\mathbf{9000 \cdot 1,02^{-t_x} = 3000\cdot}$
$\mathbf{1,02^{-2} + 6000 \cdot 1,02^{-6}}$
Divido tutto per 1000
$\mathbf{9 \cdot 1,02^{-t_x} = 3\cdot 1,02^{-2} + 6 \cdot 1,02^{-6}}$

$$1,02^{-t_x} = \frac{3 \cdot 1,02^{-2} + 6 \cdot 1,02^{-6}}{9} =$$

leggo sulle tavole e sostituisco:

$$= \frac{3 \ \cdot \ 0,96116878 \ + \ 6 \ \cdot \ 0,88797138}{9} == 0,912370513$$

Per calcolare t_x passo ai logaritmi:

$\mathbf{Log\ 1{,}02^{-t_x} = Log\ 0{,}912370513}$

$\mathbf{-t_x\ Log\ 1{,}02 = Log\ 0{,}912370513}$

$\mathbf{t_x\ CoLog\ 1{,}02 = Log\ 0{,}912370513}$

$$t_x = \frac{\text{Log } 0,912370513}{\text{CoLog } 1.02}$$

Calcolo il logaritmo al numeratore:

Log 0,912370513 =

La caratteristica e' $\bar{1}$ essendo il mio numero compreso fra 0 ed 1.

Per calcolare la mantissa cerco 912370513; tale valore e' compreso fra 9123 e 9124

9123 → 96014

5

9124 → 96019

Di fianco ai due risultati trovi il numero **5** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'

9123,705-9123 = 0,705 (approssimo alla terza cifra decimale).

Nella tabella del 5 cerco i numeri 7 0 5 spostando per ogni risultato la virgola:

7 → 3,5

0 → 0,00

5 → 0,025

quindi :

96014 +

3,5 +

0,00 +

0,025 =

96017,525

quindi scrivo:

Log 0,912370513 = $\mathbf{\bar{1}}$**,96017525**

Calcolo il Cologaritmo al denominatore

leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali

CoLog 1,02 = - Log 1,02 =

Essendo

Log 1,02 = 0,0086002

avro':
CoLog 1,02 = - Log 1,02 = -(0,0086002) = $\overline{1}$ 9913998
Nel calcolo preferisco utilizzare quello con il meno davanti

Ora posso fare la divisione e trovare $\mathbf{t_x}$

$$t_x = \frac{\textbf{Log 0, 0, 912370513}}{\textbf{CoLog 1.02}} = \frac{\overline{1}, 96017525}{-(0,0086002)} = \frac{-1+0,9601752}{-0,0086002} = \frac{-0,0398248}{-0,0075344} = \frac{0,0398248}{0,0075344} = 5,285729454$$

Sono 5 anni e 286 (approssimato) millesimi di anno: per vedere a quanti giorni corrispondono i decimali faccio la proporzione (uso l'anno commerciale di 360 giorni):
286:1000 = x : 360
Risolvo la proporzione

$$x = \frac{360 \cdot 286}{1000} = 102,96$$

che approssimiamo a 103 giorni, cioe' 3 mesi (di 30 giorni) e 13 giorni. Quindi dovro' eseguire il pagamento di 6800 euro fra 5 anni 6 mesi e 13 giorni

b) Sostituzione di piu' pagamenti

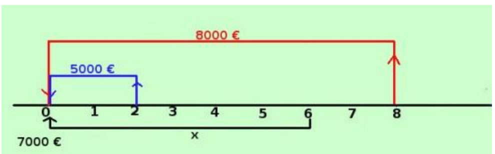
Come applicazione vediamo ora il caso di sostituzione di piu' pagamenti in altre scadenze. Useremo di solito il metodo di uguagliare i valori attuali all'epoca zero, ma e' possibile farlo ad un'epoca qualunque: otterremo un'equazione che ci permettera', a seconda dei dati, di trovare o l'importo di un pagamento oppure, ma succede piu' raramente, una scadenza.

Vediamo un esempio per ciascuno dei casi sopra considerati.

1. Ricerca dell'importo ad epoca fissa

Ho un credito di 5000 € da riscuotere fra 2 anni ed un credito di 8000 € da riscuotere fra 8 anni: cedo tali crediti ad una banca che mi anticipa 7000 e mi paghera' il saldo fra 6 anni al tasso del 1,25%. Quanto riscuotero' dalla banca fra 6 anni?
Dati:
credito1 = 5000€ tempo1= 2 anni
credito2 = 8000€ tempo2= 8 anni
anticipo 7000 € tempo3 = 0 anni
saldo = x tempo4 = 6 anni
tasso i= 1,25% = 0,0125
Troviamo l'importo del saldo **x**

Riporto tutti i dati alla data odierna
Traccio la retta dei tempi



Imposto l'equazione:

$$7000 + x \cdot v^{-6} = 5000 \cdot v^{-2} + 8000 \cdot v^{-8}$$
$$7000 + x \cdot 1{,}0125^{-6} = 5000 \cdot 1{,}0125^{-2} + 8000 \cdot 1{,}0125^{-8}$$
$$x \cdot 1{,}0125^{-6} = 5000 \cdot 1{,}0125^{-2} + 8000 \cdot 1{,}0125^{-8} - 7000$$
$$x = \frac{5000 \cdot 1{,}0125^{-2} + 8000 \cdot 1{,}0125^{-8} - 7000}{1{,}0125^{-6}}$$

Leggo sulle tavole e sostituisco

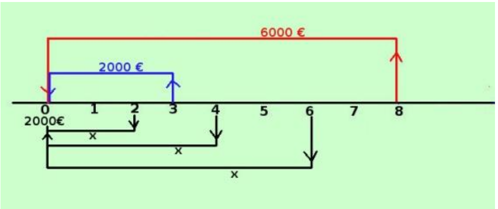
$$x = \frac{5000 \cdot 1{,}02515625 + 8000 \cdot 1{,}10448610 - 7000}{1{,}07738318} =$$
$$= \frac{6961{,}67005}{1{,}07738318} = 6461{,}647238636$$

Approssimo ad € 6461,65 quindi fra 6 anni la banca mi versera' a saldo **€ 6461,65.**

2. Ricerca dell'importo ad epoche diverse

Vediamo anche qui come fare con un esercizio
Ho un debito di 4000 € da pagare fra 3 anni ed un altro di 6000 € da pagare fra 8 anni: mi accordo con il creditore per anticipare ora 2000 € e poi eseguire 3 pagamenti uguali (3 rate) fra 2, 4 e 6 anni al tasso dell' 1,5%. Quanto dovro' pagare per ogni versamento?
Dati:
debito1 = 4000€ 3 anni
debito2 = 6000€ 8 anni
anticipo 2000 € 0 anni
rata 1 2 anni
rata 2 4 anni
rata 3 6 anni
importo rata = x
tasso i= 1,5% = 0,015
Troviamo l'importo **x** di una delle 3 rate

Riporto tutti i dati alla data odierna.
Traccio la retta dei tempi:



Imposto l'equazione:

$$2000 + x \cdot v^2 + x \cdot v^4 + x \cdot v^6 = 4000 \cdot v^3 + 6000 \cdot v^8$$
$$2000 + x \cdot 1{,}015^{-2} + x \cdot 1{,}015^{-4} + x \cdot 1{,}015^{-6} = 4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 8000 \cdot 1{,}015^{-8}$$
$$x \cdot 1{,}015^{-2} + x \cdot 1{,}015^{-4} + x \cdot 1{,}015^{-6} = 4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 8000 \cdot 1{,}015^{-8} - 2000$$
$$x \cdot (1{,}015^{-2} + 1{,}015^{-4} + 1{,}015^{-6}) = 4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 8000 \cdot 1{,}015^{-8} - 2000$$

$$x = \frac{4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 8000 \cdot 1{,}015^{-8} - 2000}{1{,}015^{-2} + 1{,}015^{-4} + 1{,}015^{-6}}$$

Leggo sulle tavole e sostituisco

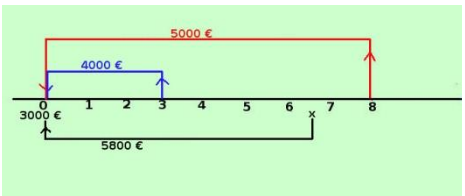
$$x = \frac{4000 \cdot 1{,}04567838 + 8000 \cdot 1{,}12649259 - 2000}{1{,}03022500 + 1{,}06136355 + 1{,}09344326} =$$

$$= \frac{11194{,}65424}{3{,}18503181} = 3514{,}769995343$$

Approssimo ad € 3514,77
Quindi fra 2, 4 e 6 anni dovro' versare la somma di **€ 3514,77**

3. Ricerca della scadenza

Conoscendo il valore da pagare possiamo trovare la scadenza Vediamo anche qui come fare con un esercizio.
Ho un credito di 4000 € da riscuotere fra 3 anni ed un altro di 5000 € da riscuotere fra 8 anni: Cedo tali crediti ad una banca che mi accredita immediatamente la somma di 3000 € e mi versera' poi l'importo di euro 5800.
Avendo concordato un tasso dell'1,5%, quando mi sara' versato tale importo?
Dati:
credito1 = 4000€ 3 anni
credito2 = 5000€ 8 anni
anticipo 3000 € 0 anni
saldo = 5800 € tempo = x
tasso i= 1,5% = 0,015
Troviamo il tempo **x** in cui la banca effettuera' il saldo
Riporto tutti i dati alla data odierna
Traccio la retta dei tempi



Imposto l'equazione:

$$3000 + 5800 \cdot v^{x} = 4000 \cdot v^{3} + 5000 \cdot v^{8}$$

$$3000 + 5800 \cdot 1{,}015^{-v} = 4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 5000 \cdot 1{,}015^{-8}$$

$$5800 \cdot 1{,}015^{-x} = 4000 \cdot 1{,}015^{-3} + 5000 \cdot 1{,}015^{-8} - 3000$$

divido tutto per 100

$$58 \cdot 1.015^{-x} = 40 \cdot 1{,}015^{-3} + 50 \cdot 1{,}015^{-8} - 30$$

$$1.015^{-x} = \frac{40 \cdot 1{,}015^{-3} + 50 \cdot 1{,}05^{-8} - 30}{58} =$$

leggo sulle tavole e sostituisco

$$= \frac{40 \cdot 0{,}95631699 + 50 \cdot 0{,}88771112 - 30}{68} = 0{,}907555786$$

Per calcolare **x** passo ai logaritmi

Log 1.015^{-x} = Log 0,907555786

-x Log 1.015 = Log 0,9075557868

x CoLog 1.015 = Log 0,907555786

$$x = \frac{\text{Log } 0{,}907555786}{\text{CoLog } 1.015}$$

Calcolo il logaritmo al numeratore
Log 0,907555786 =

La caratteristica e' $\overline{1}$ essendo il mio numero compreso fra 0 ed 1
Per calcolare la mantissa cerco 907555786; tale valore e' compreso fra 9075 e 9076

9075 → 95785

4

9076 → 95789

Di fianco ai due risultati trovi il numero **4** che corrisponde alla differenza fra i due valori della mantissa mentre la differenza fra il mio valore e quello minore e'
9075,558-9075 = 0,558 (approssimo alla terza cifra decimale)
Nella tabella del 4 cerco i numeri 5 5 8 spostando per ogni risultato la virgola

9611,6878

5 → 2,0

5 → 0,20

8 → 0,032

quindi

95785 +
2,0 +
0,20 +
0,032 =

95787,232

quindi scrivo
Log 0,907555786 = $\overline{1}$,95787232

Calcolo il Cologaritmo al denominatore;
leggo sulle tavole logaritmiche a 7 decimali
CoLog 1,015 = - Log 1,015 =
Essendo
Log 1,015 = 0,0064660
avro'
CoLog 1,015 = - Log 1,015 = -(0,0064660) = $\overline{1}$ 9935340
Nel calcolo preferisco utilizzare quello con il meno davanti

Ora posso fare la divisione e trovare **x**

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{Log\ 0,907555786}}{\mathbf{CoLog\ 1.015}} = \frac{\mathbf{\overline{1},95787232}}{\mathbf{-(0,0064660)}} = \frac{\mathbf{-1+0,95787232}}{\mathbf{-0,0064660}} = \frac{\mathbf{-0,04212768}}{\mathbf{0,0064660}}$$
$$= \frac{\mathbf{0,04212768}}{\mathbf{0,0064660}} = \mathbf{6,515261367}$$

Sono 6 anni e 515 (approssimato) millesimi di anno: per vedere a quanti giorni corrispondono i decimali faccio la proporzione (uso l'anno commerciale di 360 giorni)
515:1000 = x : 360
risolvo la proporzione

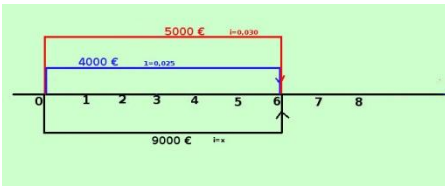
$$\mathbf{x = \frac{360 \cdot 515}{1000} = 185{,}4}$$

che approssimiamo a 185 giorni, cioe' 6 mesi e 5 giorni. Quindi la banca eseguira' il pagamento di 5800 euro fra 6 anni, 6 mesi e 5 giorni

c) Calcolo del tasso medio per piu' impieghi

Supponiamo di avere piu'capitali impiegati con interesse diverso, il problema che ci poniamo e' come trovare il tasso per sostituire a tali capitali la loro somma riferendoci ad una scadenza comune.
Ho impiegato il capitale di 4000 € al tasso del 2,50% ed un altro di 5000 € al tasso del 3% a quale tasso dovrei impiegare il capitale totale di 9000 euro per avere lo stesso montante fra 6 anni?
Dati:
capitale1 = 4000€ i=0,025
capitale2 = 5000€ i=0,030
totale = 9000 € i = x
Troviamo il tasso da applicare ai 9000 euro per avrre lo stesso risultato fra 6 anni

Riporto tutti i dati alla scadenza, cioe' fra 6 anni
Traccio la retta dei tempi



Imposto l'equazione:

$$\mathbf{9000 \cdot (1+i)^6 = 4000 \cdot (1+0{,}025)^6 + 5000 \cdot (1+0{,}030)^6}$$
$$\mathbf{9000 \cdot (1+i)^6 = 4000 \cdot (1{,}025)^6 + 5000 \cdot (1{,}030)^6}$$
Per semplicita' divido tutto per 1000
$$\mathbf{9 \cdot (1+i)^6 = 4 \cdot (1{,}025)^6 + 5 \cdot (1{,}030)^6}$$
$$\mathbf{(1+i)^6 = \frac{4 \cdot 1{,}025^6 + 5 \cdot 1{,}030^6}{9} =}$$
Leggo sulle tavole e sostituisco:
$$\mathbf{= \frac{4 \cdot 1{,}15969342 + 5 \cdot 1{,}19405230}{9} = 1{,}178781687}$$
Per calcolare **x** conviene, sulle tavole, fare l'interpolazione rispetto ai tassi essendo il tempo uguale a 6 anni

Il mio valore e' compreso fra 1,17676836 che e' il tasso del 2,75% e 1,19405230 che e' il tasso del 3%, quindi il tasso che cerco sara' compreso fra 0,0275 e 0,030

$$1{,}17676836 \rightarrow 0{,}0275$$
$$1{,}178781687 \rightarrow 0{,}0275+x$$
$$1{,}19405230 \rightarrow 0{,}030$$

imposto l'interpolazione: la differenza fra il terzo ed il primo valore sta alla differenza fra il terzo ed il primo tasso come la differenza fra il secondo ed il primo valore sta alla differenza fra il secondo ed il primo tasso (che e' x)

$$(1{,}19405230-1{,}17676836):(0{,}030-0{,}0275)= (1{,}178781687-1{,}17676836):x$$

$$(0{,}01728394):(0{,}0025)= (0{,}002013327):x$$

$$x = \frac{0{,}0025 \cdot 0{,}002013327}{0{,}01728394} = 0{,}000291214$$

Quindi il mio tasso sara'

$$0{,}0275+x = 0{,}0275+0{,}000291214 = 0{,}027791214$$

che approssimo a:

$$i = 0{,}0278$$

Quindi per avere lo stesso montante dovrei impiegare il capitale di 9000€ al tasso del 2,78%

C. *Rendite finanziarie*

a) Definizione

Abbiamo gia' visto come, da piu' pagamenti o crediti in epoche diverse e' possibile passare ad un valore unico; vediamo ora di considerare il problema in modo piu' generale.

Una **rendita finanziaria** e' una successione di somme da riscuotere o da pagare in epoche differenti.

Chiameremo **scadenze** le epoche dei pagamenti.

Chiameremo **rate** le somme da pagare alle varie scadenze.

Nei problemi che considereremo generalmente le rate avranno lo stesso importo, e le scadenze saranno equidistanti (solitamente annuali oppure mensili);
esisteranno pero' anche casi diversi cui faremo cenno

b) Fonti di una rendita

Indichiamo brevemente quali possono essere considerate delle fonti di rendite:

- L' affitto di un appartamento a rata mensile (trimestrale, annuale...) e' una rendita a rata mensile (trimestrale, annuale,...)
- L'acquisto a rate di un oggetto qualunque e' una rendita le cui rate sono le rate dovute dall'acquirente al venditore
- Una pensione (od anche stipendio) e' matematicamente considerata una rendita le cui rate sono gli importi mensili della pensione stessa

- Il rimborso periodico di un prestito e' una rendita le cui rate sono gli importi periodici dei pagamenti
- I guadagni che un imprenditore trae annualmente dalla sua attivita' possono essere considerati rate annuali di una rendita
- le spese mensili di gestione (od anche di manutenzione) di un'impresa possono essere considerate rate mensili di una rendita
- I versamenti periodici, ad esempio mensili, che un riparmiatore fa presso una banca possono essere considerati rate mensili di una rendita
- ....

Come si vede dagli esempi qui sopra riportati il concetto di rendita e' piuttosto ampio ed elastico.
Nelle pagine successive considereremo particolarmente le rendite a rata costante e vedremo come calcolarne il valore attuale oppure ad una data assegnata

c) Caratteri di una rendita

Per definire una rendita si deve definirne l'importo e la scadenza di ogni rata

- l'**importo**: e' la somma che devo pagare come rata.
  Siccome noi per ora considereremo rendite a rata costante l'importo della rata per noi sara' fisso

- la **scadenza**: e' la data in cui devo pagare la rata.
  Essendo le rate periodiche la scadenza dovra' essere determinata dalle seguenti caratteristiche:

  - il **periodo**: tempo che intercorre fra la scadenza di una rata e l'altra:
    avremo quindi rendite annuali, rendite frazionate (con periodo inferiore all'anno) e rendite poliennali

  - la **data di decorrenza** inizio del primo periodo che e' coperto dalla rendita
    in tale data la rata potra' essere anticipata, cioe' pagata all'inizio del periodo come succede per un affitto, oppure potra' essere posticipata come succede con uno stipendio
    quindi, considerando una rendita annuale con decorrenza 1 gennaio 2018 il primo gennaio sara' l'inizio del periodo di decorrenza della rendita e, se pago la rata con decorrenza 1 gennaio 2018 la rendita sara' considerata anticipata, mentre se la pago il 31 dicembre 2018 tale rata sara' considerata posticipata

  - la **durata**: insieme dei periodi coperti dalle rate
    Ad esempio considerando una rendita con inizio 1 gennaio 2018 e fine 1 gennaio 2028 essa avra' durata 11 anni (rendita undecennale) anche se la distanza fra il primo e l'ultimo pagamento sara' solamente 10 anni;
    infatti tale rendita copre 11 anni: da tutto il 2018 a tutto il 2028

    Se la rendita e' anticipata la prima rata e' il 1 gennaio 2018 e l'ultima rata 1 gennaio 2028 quindi fra la prima e l'ultima rata sono trascorsi 10 anni anche se il periodo e' 11 anni (cioe' la rendita copre 11 anni: 11 periodi).
    Se la rendita e' posticipata la prima rata e' il 31 dicembre 2018 e l'ultima rata

31 dicembre 2028 quindi fra la prima e l'ultima rata sono trascorsi 10 anni anche se il periodo e' 11 anni (cioe' la rendita copre 11 anni: 11 periodi).

d) Valore di una rendita

Definiamo valore di una rendita ad una certa data la somma dei montanti e dei valori attuali delle singole rate della rendita riferite a quella data.

Esempio: se ho una rendita di 4 rate con scadenza
rata 1 1 gennaio 2021
rata 2 1 gennaio 2022
rata 3 1 gennaio 2023
rata 4 1 gennaio 2024
per ottenere il valore della rendita alla data del 1 gennaio 2023 dovro'
calcolare il montante della rata 1 per 2 anni (sposto avanti nel tempo per 2 anni)
calcolare il montante della rata 2 per 1 anno (sposto avanti nel tempo per 1 anno)
considerare l'importo della rata 3
calcolare il valore della rata 4 scontato di 1 anno (sposto indietro nel tempo di 1 anno)
sommare i quattro risultati

da notare che, una volta trovato il valore di una rendita ad una certa data, posso calcolarla a qualunque altra data spostando il risultato nel tempo senza dover rifare tutti i calcoli, quindi se, nell'esempio precedente avessi ottenuto il valore Z e volessi trovare il valore della rendita al primo gennaio 2021 dovrei semplicemente portare indietro Z nel tempo per 2 anni, cioe' $\mathbf{Z} \cdot v^2$
se invece volessi trovare il valore della rendita al 1 gennaio 2024 dovrei portare Z in avanti nel tempo per 1 anno cioe' $\mathbf{Z} \cdot u$

Anche se il valore di una rendita puo' essere calcolato in un'epoca qualunque di solito noi siamo interessati o al valore finale (montante) oppure al valore iniziale (valore attuale):

- **Montante di una rendita** e' il valore della rendita calcolato o dopo le scadenze delle rate oppure in coincidenza con l'ultima rata e quindi e' un insieme di montanti da cui il nome

- **Valore attuale di una rendita** e' il valore della rendita calcolato o prima delle scadenze delle rate oppure in coincidenza con la prima rata e quindi e' un insieme di valori attuali da cui il nome

e) Nomenclatura

Approfondimento sull'uso dei simboli

Indicheremo il **montante di una rendita** con il simbolo $\mathscr{s}$ (lettera s in corsivo)

Indicheremo il **Valore attuale di una rendita** con il simbolo $\mathscr{a}$ (lettera a in corsivo)
Per indicare la rata anticipata metteremo sopra il simbolo due puntini (il nome preciso e' dieresi) e lo chiameremo **anticipato** (va letto prima di tutti gli altri simboli successivi)

Esempio: $\ddot{\mathscr{s}}$ leggeremo **s anticipato**
Per indicare il numero **n** dei periodi li scriveremo sotto il simbolo ¬ e lo leggeremo **figurato** mentre di fianco indicheremo

il tasso **i**

Esempio: $a_{\overline{n}|i}$ leggeremo **a figurato n al tasso i**
Se i periodi della rata non sono immediati ma l'inizio e' spostato nel tempo di p anni, scriveremo p seguito dal simbolo **/** e leggeremo **differito p**

Esempio: $_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ leggeremo **a anticipato differito p figurato n al tasso i**

Per quanto riguarda le rate, supponendo le rate costanti di 1 euro, distinguendo fra montante e valore attuale avremo:

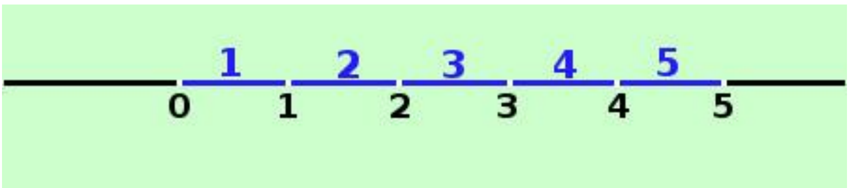
- Per quanto riguarda il montante:
  - se la rata scade all'inizio dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita anticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ si legge s anticipato figurato n al tasso i
  - se la rata scade alla fine dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita posticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $s_{\overline{n}|i}$ si legge s figurato n al tasso i
- Per quanto riguarda il valore attuale
  - se il primo periodo della rendita decorre da oggi parleremo di rendita immediata:
    se la rata scade all'inizio dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita immediata anticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ si legge a anticipato figurato n al tasso i
    se la rata scade alla fine dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita immediata posticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $a_{\overline{n}|i}$ si legge a figurato n al tasso i
  - se il primo periodo della rendita e' situato in un anno futuro parleremo di rendita differita
    se la rata scade all'inizio dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita differita anticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ si legge a anticipato differito p figurato n al tasso i
    se la rata scade alla fine dei periodi in cui e' suddivisa la rendita parleremo di **rendita differita posticipata** ed utilizzeremo per indicarla il simbolo
    $_{p/}a_{\overline{n}|i}$ si legge a differito p figurato n al tasso i

---

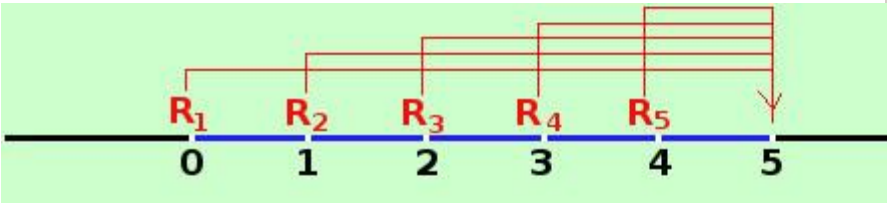
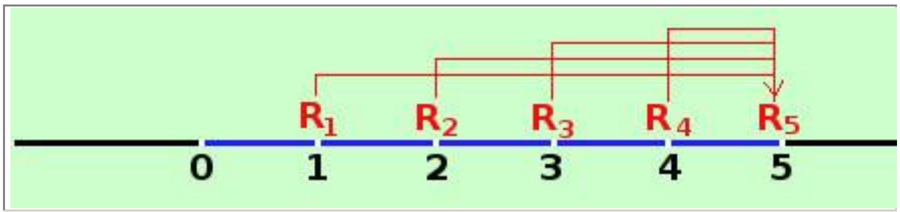
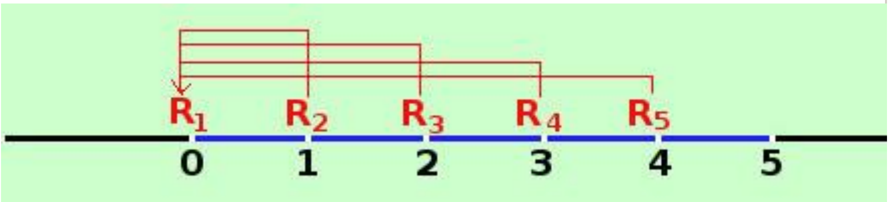
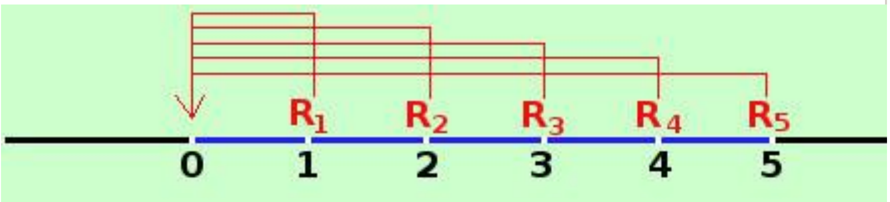
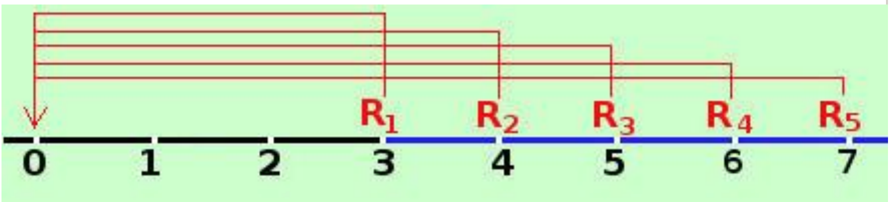
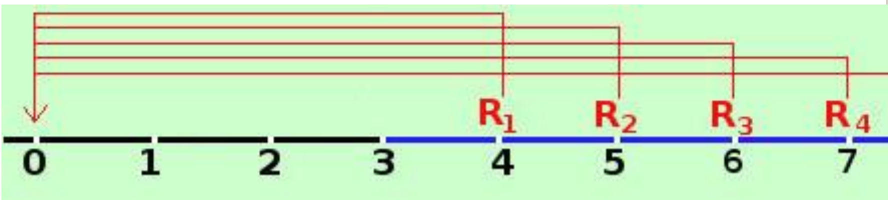
Se vuoi vedere una tabella riassuntiva dei vari casi indicati:

Tabella di riepilogo

Costruiamo una tabella riassuntiva: per semplicita' nelle illustrazioni considerero' una rendita di 5 periodi (gli spazi in blu), quindi n=5

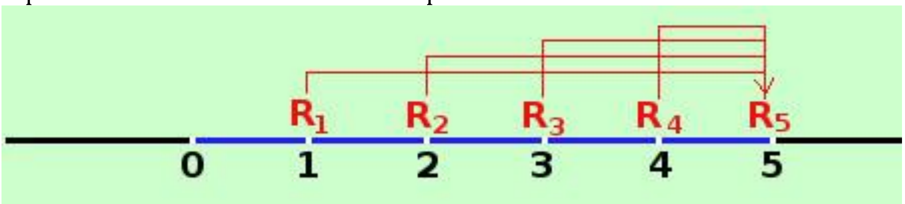


inoltre nelle rendite differite considerero' 3 anni come periodo di differimento prima che inizi la rendita, quindi p=3

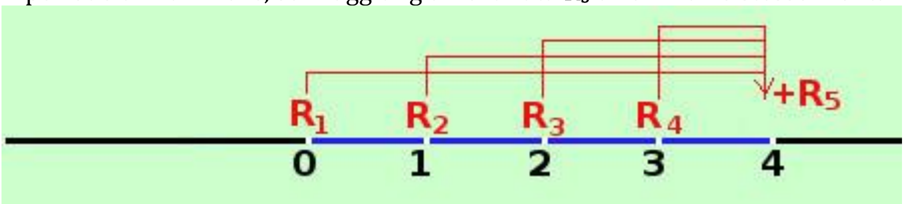
tipo di rendita	retta dei tempi	simbolo	come si legge
montante di rendita anticipata		$\ddot{s}_{\overline{n}\vert i}$	s anticipato figurato n al tasso i
montante di rendita posticipata		$s_{\overline{n}\vert i}$	s figurato n al tasso i
valore attuale di una rendita anticipata		$\ddot{a}_{\overline{n}\vert i}$	a anticipato figurato n al tasso i
valore attuale di una rendita posticipata		$a_{\overline{n}\vert i}$	a figurato n al tasso i
valore attuale di una rendita differita anticipata		${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	a anticipato differito p figurato n al tasso i
valore attuale di una rendita differita posticipata		${}_{p/}a_{\overline{n}\vert}$	a differito p figurato n al tasso i

E' possibile, con un semplice accorgimento, trasformare un montante di una rendita posticipata in montante di una rendita anticipata ed anche trasformare il valore attuale di un rendita immediata anticipata nel valore attuale di una rendita immediata posticipata. Vediamo come fare:

Consideriamo il montante di una rendita posticipata; per semplicita' considero una rendita immediata posticipata e di 5 periodi. Vediamone la retta dei tempi

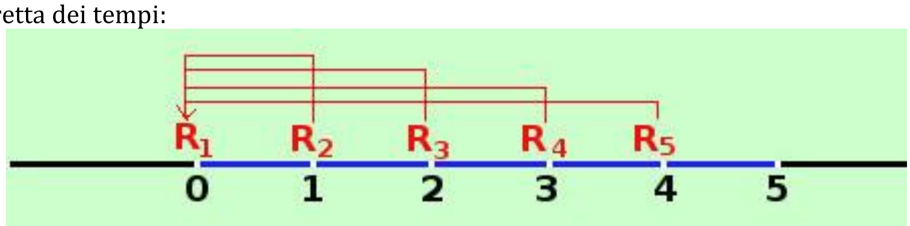


La rata **R**$_5$, va versata alla fine dell'ultimo periodo e, nello spesso momento, verra' restituita all'interno del montante; di conseguenza, se eliminiamo il primo periodo, possiamo considerare una rendita immediata anticipata per un periodo di 4 anni che, se vi aggiungiamo la rata **R**$_5$ ci fornira' lo stesso montante:

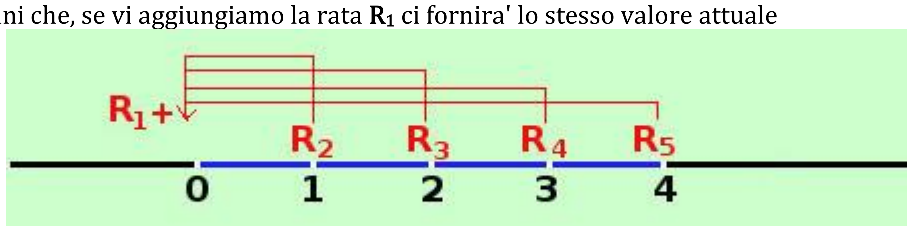


Quindi possiamo dire che:
Una rendita di tipo montante, di n periodi posticipata puo' essere trasformata in una rendita anticipata di n-1 periodi eliminando il primo periodo ed aggiungendo l'ultima rata al montante cosi' ottenuto.
Da notare che mentre prima la prima rata era pagata il 31 dicembre ora la prima rata (vale anche per le altre) e' pagata il primo gennaio dell'anno successivo, cioe' esattamente un giorno dopo, pero' finanziariamente cio' non comporta nessuna variazione.

Lo stesso ragionamento puo' essere fatto per il valore attuale di una rendita anticipata: per semplicita' considero una rendita immediata anticipata e di 5 periodi.
Vediamone la retta dei tempi:



La rata **R**$_1$, va versata all'inizio del primo periodo e, nello spesso momento, va calcolato il valore attuale; di conseguenza, se eliminiamo l'ultimo periodo, possiamo considerare una rendita immediata posticipata per un periodo di 4 anni che, se vi aggiungiamo la rata **R**$_1$ ci fornira' lo stesso valore attuale



quindi possiamo dire che
Una rendita di tipo valore attuale, di n periodi anticipata puo' essere trasformata in una rendita posticipata di n-1 periodi eliminando l'ultimo periodo ed aggiungendo la prima rata al valore attuale cosi' ottenuto

Notare anche qui che mentre precedentemente l'ultima rata (ed anche le altre rate) era pagata il il primo gennaio ora l'ultima rata e' pagata 31 dicembre dell'anno precedente, cioe' esattamente un giorno prima, pero' finanziariamente cio' non comporta nessuna variazione

---

f) Osservazione importante

E' sempre possibile passare dal valore di una rendita calcolato in una certa data a quello relativo ad una data diversa: si tratta di spostare nel tempo il valore della rendita come abbiamo gia' visto.

Quindi se abbiamo il montante di una rendita, fra n anni ha il valore $s_{\overline{n}|i}$ potremo trovarne il valore attuale spostandola indietro nel tempo per n anni, cioe' :

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot v^n$$

Il valore attuale della rendita immediata posticipata si puo' ottenere come sconto per n anni del montante calcolato all'atto dell'ultimo versamento
e vale anche

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} \cdot v^n$$

Il valore attuale della rendita immediata anticipata si puo' ottenere come sconto per n anni del montante della rendita anticipata
Similmente potremo trovare il valore della rendita s anni prima della scadenza (essendo s minore di n) calcolando $s_{\overline{n}|i} \cdot v^s$

Similmente se abbiamo il valore attuale di una rendita posticipata $a_{\overline{n}|i}$ potremo trovarne il montante all'atto dell'ultimo versamento spostandola avanti nel tempo per n anni, cioe'

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot u^n$$

Il montante della rendita immediata posticipata si puo' ottenere come montante per n anni del valore attuale della rendita stessa
e vale anche

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot u^n$$

Il montante della rendita immediata anticipata si puo' ottenere come montante fra n anni del valore attuale della rendita anticipata
Similmente potremo trovare il valore della rendita posticipata dopo s anni (essendo s minore di n) calcolando $a_{\overline{n}|i} \cdot u^s$

g) Tipi di rendite

1. Rendite annue a rata costante

Come abbiamo visto nell'osservazione e' sempre possibile passare dal valore di una rendita calcolato in una certa data a quello relativo ad una data diversa: si tratta di spostare nel tempo il valore della rendita.

Di conseguenza, nelle formule, calcolata la formula per un ripo di rendita potremo trovare le altre formule spostando nel tempo opportunamente il risultato trovato.

Qui consideriamo solamente le rendite di periodo n con n numero di anni e con rata R costante

- calcolo del montante
- calcolo del valore attuale di rendita immediata
- calcolo del valore attuale di rendita differita
- cenni su una rendita perpetua
- scomposizione di rendite

a) Calcolo del montante di rendita immediata

a. Calcolo del montante di una rendita immediata posticipata

Prima di procedere consiglio un ripasso del concetto di progressione geometrica dovremo utilizzare la formula per la somma dei suoi primi n termini

---

Consideriamo la rata fissa dell'importo di **1 €**; per qualunque altro importo bastera' poi moltiplicare tale importo per il nostro risultato

Consideriamo sulla retta dei tempi una rendita immediata posticipata di rata 1 € e di durata n anni

I numeri sotto la retta indicano i periodi.

Il primo euro sara' versato alla fine del primo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n-1 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{n-1}}$**€** $= u^{n-1}$
Il secondo euro sara' versato alla fine del secondo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n-2 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{n-2}}$**€** $= u^{n-2}$
Il terzo euro sara' versato alla fine del terzo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n-3 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{n-3}}$**€** $= u^{n-3}$
....
....
Il quartultimo euro sara' versato alla fine del quartultimo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per 3 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{3}}$**€** $= u^{3}$
Il terzultimo euro sara' versato alla fine del terzultimo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per 2 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{2}}$**€** $= u^{2}$
Il penultimo euro sara' versato alla fine del penultimo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per 1 periodo quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1\cdot(1+i)^{1}}$**€** $= u$
L'ultimo euro sara' versato alla fine dell'ultimo periodo e avra' valore **1€ = 1**
per semplificare alla fine ho sottointeso gli € .

Raccogliendo per calcolare il montante dovremo eseguire la somma:

$$s_{\overline{n}|i} = u^{n-1} + u^{n-2} + u^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + u^3 + u^2 + u + 1$$

per la proprieta' commutativa dell'addizione posso scrivere

Non dirlo al Prof. di Religione, ma si potrebbe anche procedere evangelicamente: infatti se applichi la regola evangelica "gli ultimi saranno i primi ed i primi saranno ultimi" allora metti l'ultimo termine al primo posto, il penultimo al secondo posto,.... il primo termine all'ultimo posto ed ottieni ugualmente.

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u^{n-3} + u^{n-2} + u^{n-1}$$

Si vede ora che si tratta di una progressione geometrica di n termini di ragione u e quindi, applicando la formula della somma:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

possiamo rendere questa formula un po' piu' semplice sviluppando il fattore u

$$s_{\overline{n}|i} = 1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{1+i - 1}$$

sommando otteniamo la formula finale

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Questa e' una formula molto importante e va ricordata a memoria; comunque noi, nei problemi, cercheremo soprattutto di trovarne ed usarne i valori utilizzando le tavole finanziarie

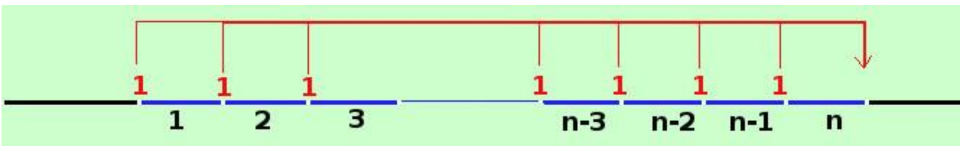
---

Vediamo un semplice esempio
trovare il montante di una rendita posticipata di 10 anni di rata 2000 € al tasso i = 0,02
dati:
R = 2000 €
i = 0,02
n = 10
Cerco sulle tavole "montante della rendita unitaria posticipata. valori di $s_{\overline{n}|i}$"
per i=0,02 e n=10 trovo il valore 10,94972100, quindi avro' il montante
10,94972100·2000 € = 21899,442 €

b. Calcolo del montante di una rendita immediata anticipata

Consideriamo la rata fissa dell'importo di **1 €**; per qualunque altro importo bastera' poi moltiplicare tale importo per il nostro risultato.

Consideriamo sulla retta dei tempi una rendita immediata anticipata di rata 1 € e di durata n anni.



i numeri sotto la retta indicano i periodi.

Il primo euro sara' versato all'inizio del primo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n periodi quindi alla fine avra' valore **$1 \cdot (1+i)^n$€ = u^n**
Il secondo euro sara' versato al'inizio del secondo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n-1 periodi quindi alla fine avra' valore **$1 \cdot (1+i)^{n-1}$€ = u^{n-1}**
Il terzo euro sara' versato all'inizio del terzo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per n-2 periodi quindi alla fine avra' valore **$1 \cdot (1+i)^{n-2}$€ = u^{n-2}**
....
....
Il quartultimo euro sara' versato all'inizio del quartultimo periodo e dovra' essere spostato

avanti nel tempo per 4 periodi quindi alla fine avra' valore $1 \cdot (1+i)^4 € = u^4$
Il terzultimo euro sara' versato all'inizio del terzultimo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per 3 periodi quindi alla fine avra' valore $1 \cdot (1+i)^3 € = u^3$
Il penultimo euro sara' versato all'inizio del penultimo periodo e dovra' essere spostato avanti nel tempo per 2 periodi quindi alla fine avra' valore $1 \cdot (1+i)^2 € = u^2$
L'ultimo euro sara' versato all'inizio dell'ultimo periodo e avra' valore $1 \cdot (1+i) € = u$
per semplificare alla fine ho sottointeso gli €

Raccogliendo per calcolare il montante dovremo eseguire la somma

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u^n + u^{n-1} + u^{n-2} + \dots\dots + u^4 + u^3 + u^2 + u$$

se raccolgo u da ogni termine ottengo

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u(u^{n-1} + u^{n-2} + u^{n-3} + \dots\dots + u^3 + u^2 + u + 1)$$

il termine tra parentesi e' esattamente il montante della rendita posticipata trovato nella pagina precedente.

In effetti sarebbe bastato dire che per passare dalla rendita anticipata alla rendita posticipata basta spostare la rendita anticipata in avanti di 1 anno e quindi moltiplicarla per u secondo la formula:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u \cdot s_{\overline{n}|i}$$

Infatti, tutti i versamenti della rendita posticipata vengono fatti un anno dopo rispetto ai versamenti di quella anticipata.

Ora procedo come prima:
per la proprieta' commutativa dell'addizione posso scrivere

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u(1 + u + u^2 + u^3 + \dots\dots + u^{n-3} + u^{n-2} + u^{n-1})$$

Si vede ora che, dentro parentesi, si tratta di una progressione geometrica di n termini di ragione u e quindi, applicando la formula della somma

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u\left(1 \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1}\right)$$

Possiamo rendere questa formula un po' piu' semplice sviluppando il fattore u

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{1+i - 1}$$

sommando otteniamo la formula finale

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)$$

cioe'. come avevamo gia' detto, per ottenere il momtante della rendita anticipata basta moltiplicare il montante della rendita posticipata per **1+i**
(ricorda che il montante della rendita anticipata e' calcolato un anno dopo l'ultimo versamento, quindi intuitivamente sposti in avanti nel tempo di 1 anno i versamenti della rendita posticipata)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot u = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Vediamo anche qui un semplice esempio
trovare il montante di una rendita anticipata di 20 anni di rata 1200 € al tasso i = 0,025
dati:
R = 1200 €
i = 0,025
n = 20
Cerco sulle tavole "montante della rendita unitaria anticipata. valori di $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$"
per i=0,025 e n=20 trovo il valore 26,18327405, quindi avro' il montante
26,18327405·1200 € = 31419,92886 €
che arrotondo a **€ 31419,93**

c. Calcolo del montante calcolato k anni dopo l'ultimo versamento

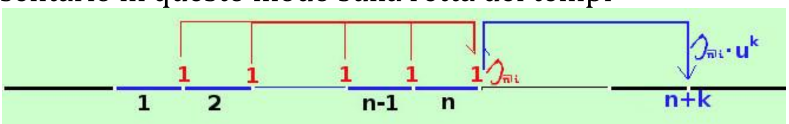
Invece di calcolare il montante all'atto dell'ultimo versamento (rendita posticipata) oppure un anno dopo l'ultimo versamento (rendita anticipata) e' possibile calcolare il valore di tale montante in un qualunque periodo di tempo successivo, ad esempio dopo **k** anni: per fare cio' sara' sufficiente spostare in avanti nel tempo di k anni il valore del montante calcolato all'atto dell'ultimo versamento, cioe', semplicemente:

$$s_{\overline{n}|i} \cdot u^k$$

od anche

$$s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^k$$

Possiamo rappresentarlo in questo modo sulla retta dei tempi



I numeri sotto la retta indicano i periodi, meno l'ultimo che indica la fine dell'anno

---

Per utilizzare le tavole finanziarie e' possibile rendere la formula piu' semplice da calcolare

Sviluppiamo la formula:

$$s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^k =$$

moltiplico

$$= \frac{(1+i)^{n+k} - (1+i)^k}{i} =$$

aggiungo e tolgo 1 al numeratore

$$= \frac{(1+i)^{n+k} - 1 - (1+i)^k + 1}{i} =$$

Ora separo le frazioni: davanti alla seconda metto in evidenza il meno (quindi cambio di segno i termini sopra)

$$= \frac{(1+i)^{n+k} - 1}{i} - \frac{(1+i)^k - 1}{i} =$$

Il primo termine e' il montante di una rendita posticipata di durata n+k anni $s_{\overline{n+k}|i}$

Il secondo termine e' il montante di una rendita posticipata di durata k anni $s_{\overline{k}|i}$ quindi scrivo

$$= s_{\overline{n+k}|i} - s_{\overline{k}|i}$$

e raccogliendo

$$s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^k = s_{\overline{n+k}|i} - s_{\overline{k}|i}$$

Questa formula sara' piu' semplice da usare perche' leggendo i due valori sulle tavole sara' sufficiente fare una sottrazione per ottenere il risultato invece di dover fare una moltiplicazione.

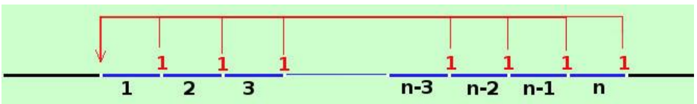
Vediamo anche qui un semplice esempio:
trovare il montante di una rendita anticipata di 20 anni di rata 1200 € al tasso i = 0,025 calcolato 10 anni dopo l'ultimo versamento
dati:
R = 1200 €
i = 0,025
n = 20
k = 10
Cerco sulle tavole "montante della rendita unitaria posticipata. valori di $s_{\overline{n}|i}$"
per i=0,025 e n+k=20+10=30 trovo il valore 43,90270316
per i=0,025 e k=10 trovo il valore 11,20338177
quindi avro' il montante
(43,90270316-11,20338177)·1200 € = 39239,185668 €
che arrotondo a **€ 39239,19**

b) Calcolo del valore attuale di rendita immediata

a. Valore attuale di una rendita immediata posticipata

Consideriamo la rata fissa dell'importo di **1 €**; per qualunque altro importo bastera' poi moltiplicare tale importo per il nostro risultato.

Consideriamo sulla retta dei tempi una rendita immediata posticipata di rata 1 € e di durata n anni.



I numeri sotto la retta indicano i periodi: essendo posticipata la rata e' pagata alla fine del periodo.

Il primo euro sara' versato alla fine del primo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per 1 periodo quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1 \cdot (1+i)^{-1} € = \nu}$
Il secondo euro sara' versato alla fine del secondo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per 2 periodi quindi alla fine avra' valore $\mathbf{1 \cdot (1+i)^{-2} € = \nu^2}$

Il terzo euro sara' versato alla fine del terzo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per 3 periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-3}€ = v^3$

....

....

Il quartultimo euro sara' versato alla fine del quartultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-3 periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-3)}€ = v^{n-3}$

Il terzultimo euro sara' versato alla fine del terzultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-2 periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-2)}€ = v^{n-2}$

Il penultimo euro sara' versato alla fine del penultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-1 periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-1)}€ = v^{n-1}$

L'ultimo euro sara' versato alla fine dell'ultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-n}€ = v^n$

per semplificare alla fine ho sottointeso gli €

Raccogliendo per calcolare il montante dovremo eseguire la somma

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + v^3 + \dots\dots\dots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n$$

Tra tutti i termini metto in evidenza **v**

$$a_{\overline{n}|i} = v(1 + v + v^2 + \dots\dots\dots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n)$$

Si vede ora che, dentro parentesi si tratta di una progressione geometrica di n termini di ragione v e quindi, applicando la formula della somma essendo la ragione v minore di 1 utilizzo la seconda formula

$$a_{\overline{n}|i} = v \cdot \left(1 \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}\right) = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

possiamo rendere questa formula un po' piu' semplice tenendo presente che vale: $v = 1/u$ e quindi $u \cdot v = 1$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{u} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} =$$

moltiplico numeratore con numeratore e denominatore con denominatore

$$= \frac{v^n - 1}{uv - u} = \frac{v^n - 1}{1 - u} = \frac{v^n - 1}{1 - (1+i)} = \frac{v^n - 1}{1 - 1 - i} = \frac{v^n - 1}{-i}$$

cambio di segno sopra e sotto, poi sopra scrivo prima il positivo poi il negativo

$$= \frac{-v^n + 1}{+i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Quindi la formula finale e':

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

od anche ricordando che vale $v^n = (1+i)^{-n}$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Questa e' una formula molto importante e va ricordata a memoria.

Possiamo trasformare la formula in altre forme equivalenti anch'esse molto importanti
Moltiplicando numeratore e denominatore della penultima formula per $u^n = (1+i)^n$ otteniamo

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{u^n}{u^n} \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{u^n(1 - v^n)}{i \cdot u^n} = \frac{u^n - u^n v^n}{i\, u^n} \quad a_{\overline{n}|i} =$$

e ricordando che $u^n\, v^n = 1$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{u^n - 1}{i\, u^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Possiamo notare che, moltiplicando per u^n il numeratore, lo abbiamo spostato nel tempo in avanti per n anni ottenendo cosi' il valore del montante di una rendita posticipata di periodo n anni, cioe'

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

e quindi, sostituendo i simboli relativi ai valori

$$a_{\overline{n}|i} = v^n \cdot s_{\overline{n}|i}$$

Quindi possiamo ottenere il valore attuale di una rendita posticipata spostando indietro nel tempo il montante della stessa rendita.

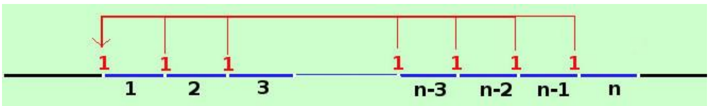
Noi di solito leggeremo l'importo dei valori attuali sulle tavole, interpolando se il tasso non e' compreso fra quelli tabulati; nel caso i dati siano oltre i limiti delle tavole occorre utilizzare i logaritmi ed in tal caso utilizzeremo le formule che abbiamo evidenziato: ne parleremo piu' diffusamente negli esercizi.

Vediamo anche qui un semplice esempio:
trovare il valore attuale di una rendita posticipata di 10 anni di rata 2000 € al tasso i = 0,02
dati:
R = 2000 €
i = 0,02
n = 10
Cerco sulle tavole "valore attuale della rendita unitaria immediata posticipata. valori di $a_{\overline{n}|i}$"
per i=0,02 e n=10 trovo il valore 8,98258501, quindi avro' il montante
8,98258501·2000 € = 17965,17002 €
che arrotondo a **17965,17 €**

b. Valore attuale di una rendita immediata anticipata

Consideriamo la rata fissa dell'importo di **1 €**; per qualunque altro importo bastera' poi moltiplicare tale importo per il nostro risultato.

Consideriamo sulla retta dei tempi una rendita immediata anticipata di rata 1 € e di durata n anni.



I numeri sotto la retta indicano i periodi: essendo la rendita anticipata la rata e' pagata all'inizio del periodo.

Il primo euro sara' versato all'inizio del primo periodo e e avra' valore **1€ = 1**
Il secondo euro sara' versato all'inizio del secondo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per per 1 periodo quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-1}€ = v$
Il terzo euro sara' versato all'inizio del terzo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per 2 periodi quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-2}€ = v^2$
....

....
Il quartultimo euro sara' versato all'inizio del quartultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-4 periodi quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-4)}€ = v^{n-4}$
Il terzultimo euro sara' versato all'inizio del terzultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-3 periodi quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-3)}€ = v^{n-3}$
Il penultimo euro sara' versato all'inizio del penultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-2 periodi quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-2)}€ = v^{n-2}$
L'ultimo euro sara' versato all'inizio dell'ultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per n-1 periodi quindi avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(n-1)}€ = v^{n-1}$
per semplificare alla fine ho sottointeso gli €

Raccogliendo per calcolare il montante dovremo eseguire la somma

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + \ldots\ldots + v^{n-4} + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1}$$

Si vede ora che si tratta di una progressione geometrica di n termini di ragione u e quindi, applicando la formula della somma Essendo la ragione v minore di 1 utilizzo la seconda formula

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1\cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

---

possiamo trasformare questa formula in altre forme equivalenti anch'esse molto importanti: vediamo come

Considerato che vale

$$1\text{-}v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

Se vado a sostituire nella formula ottengo:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{\dfrac{i}{1+i}} = \frac{1 - v^n}{i}\cdot(1+i)$$

E quindi otteniamo la formula

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)$$

Cioe' anche nel valore attuale (come nel montante) per passare da una rendita posticipata ad una rendita anticipata basta moltiplicare per 1+i .

Per il calcolo pratico del valore attuale conviene pero' utilizzare un'altra formula partiamo dalla formula trovata precedentemente:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i}\cdot(1+i)$$

Eseguiamo la moltiplicazione:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} \cdot (1+i) = \frac{1+i-(1+i)\cdot v^n}{i} = \frac{1+i- u\cdot v^n}{i} = \frac{1+i- v^{n-1}}{i} =$$

spezzo la frazione

$$= \frac{1-v^{n-1}}{i} + \frac{i}{i} =$$

Il primo termine e' il valore attuale di una rendita posticipata di n-1 periodi, quindi posso scrivere

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$$

Questa formula esprime che per ottenere una rendita anticipata basta aggiungere la prima rata ad una rendita posticipata minore di un periodo

---

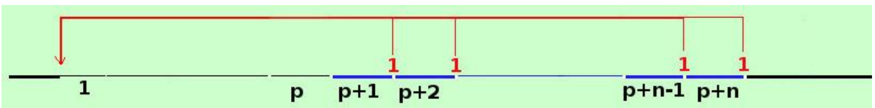
Vediamo un semplice esempio
trovare il montante di una rendita posticipata di 10 anni di rata 2000 € al tasso i = 0,02
dati:
R = 2000 €
i = 0,02
n = 10

Cerco sulle tavole "montante della rendita unitaria posticipata. valori di $s_{\overline{n}|i}$"
per i=0,02 e n=10 trovo il valore 10,94972100, quindi avro' il montante
10,94972100·2000 € = 21899,442 €

c) Calcolo del valore attuale di rendita differita

Consideriamo la rata fissa dell'importo di **1 €**; per qualunque altro importo bastera' poi moltiplicare tale importo per il nostro risultato**.**

Consideriamo sulla retta dei tempi una rendita immediata posticipata di rata 1 €, iniziante fra **p** anni e di durata **n** anni .



I numeri sotto la retta indicano i periodi: essendo posticipata la rata e' pagata alla fine del periodo e la prima rata scade alla fine del periodo **p+1.**

Il primo euro sara' versato alla fine del periodo **p+1** e quindi dovra' essere spostato indietro nel tempo per p+1 anni, quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(p+1)}€ = v^{p+1}$
Il secondo euro sara' versato alla fine del periodo **p+2** e dovra' essere spostato indietro nel tempo per p+2 anni quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(p+2)}€ = v^{p+2}$
....
....
Il penultimo euro sara' versato alla fine del periodo p+n-1 e dovra' essere spostato indietro nel tempo per p+n-1 anni quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(p+n-1)}€ = v^{p+n-1}$
L'ultimo euro sara' versato alla fine dell'ultimo periodo e dovra' essere spostato indietro nel tempo per p+n periodi quindi alla fine avra' valore $1\cdot(1+i)^{-(p+n)}€ = v^{p+n}$
per semplificare alla fine ho sottointeso gli €

Raccogliendo per calcolare il montante dovremo eseguire la somma:

${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = v^{p+1} + v^{p+2} + \dots\dots\dots + v^{p+n-1} + v^{p+n}$

Tra tutti i termini metto in evidenza v^p

$a_{\overline{n}|i} = v^p(v + v^2 + \dots\dots\dots + v^{n-1} + v^n)$

Si vede ora che, dentro parentesi si tratta del valore attuale di una rendita posticipata e quindi posso scrivere:

$${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = v^p\, a_{\overline{n}|i}$$

Cioe' posso dire:

il valore attuale di una rendita differita posticipata di p anni e' uguale al valore attuale di una rendita immediata posticipata con lo stesso periodo spostata indietro nel tempo per p anni

Basta guardare la retta dei tempi: se sposti indietro nel tempo la rendita per p anni attieni una rendita immediata posticipata di n periodi:

$${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = v^p \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Siccome abbiamo un prodotto possiamo rendere questa formula un po' piu' semplice per gli esercizi eseguendo la moltiplicazione e trasformando nel seguente modo :

$${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = v^p \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{v^p - v^{n+p}}{i} =$$

Al numeratore tolgo ed aggiungo 1 (posso farlo perche' non mi cambia il valore dell'espressione):

$$= \frac{v^p - 1 + 1 - v^{n+p}}{i} = \frac{1 - v^{n+p} + v^p - 1}{i} =$$

Ora spezzo la frazione

$$= \frac{1 - v^{n+p}}{i} + \frac{v^p - 1}{i} = \frac{v^{n+p} - 1}{i} - \frac{v^p - 1}{i}$$

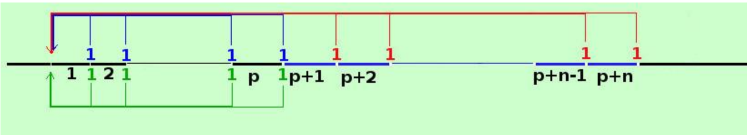
Ho esplicitato il meno cambiando segno al numeratore del secondo termine dopo l'uguale

Il primo termine corrisponde al valore attuale di una rendita immediata posticipata di **n+p** periodi ed il secondo ad una rendita immediata posticipata di **p** periodi, cioe':

$${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i}$$

In questo modo negli esercizi potremo fare una sottrazione.

Da notare che in pratica ho aggiunto ai periodi effettivi della rendita i periodi di differimento e quindi li ho tolti, in questo modo il valore della rendita resta invariato: nel disegno vedi in colori diversi:



In nero tutti i periodi

in rosso le rate originali ${}_{p/}a_{\overline{n}|i}$

in blu le rate aggiunte: in questo modo le rate rosse e blu assieme danno $a_{\overline{n+p}|i}$

in verde le rate tolte $a_{\overline{n}|i}$

Se la rendita e' anticipata possiamo trasformarla in una rendita posticipata semplicemente togliendo un periodo al tempo del differimento

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = {}_{p-1/}a_{\overline{n}|i}$$

Cioe' ad esempio una rendita anticipata che inizi fra 5 anni si puo' considerare come una rendita posticipata che inizi fra 4 anni

---

Vediamo anche qui un semplice esempio:
trovare il valore attuale di una rendita anticipata di periodo 10 anni e differita di 6 anni di rata 2000 € al tasso i = 0,02
Essendo la rendita anticipata cerco il valore attuale di una rendita posticipata differita di 5 anni
dati:
R = 2000 €
i = 0,02
n = 10
p = 5
n+p = 15
Utilizzo la formula $_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i}$

Cerco quindi sulle tavole "valore attuale della rendita unitaria immediata posticipata. valori di $a_{\overline{n}|i}$" per i periodi **15** e **5**

per i=0,02 e n=15 trovo il valore 12,84926350, quindi avro' il montante
12,84926350·2000 € = 25698,527 €
per i=0,02 e n=5 trovo il valore 4,71345951, quindi avro' il montante
4,71345951·2000 € = 9426,91902 €
Faccio la differenza
25698,527 - 9426,91902 = 16271,60798
che arrotondo a
16271,61 €

d) cenni su una rendita perpetua

e) scomposizione di rendite

h) rendite frazionate a rata costante

i) brevi cenni sulle rendite a rate variabili

D. Costituzione di un capitale

E. Ammortamento di un debito

F. Assicurazioni

G. Riserva matematica

H. I problemi della scelta

I. Introduzione alla programmazione lineare